

Les mathématiques au service de la performance sportive

Par Amandine AFTALION

Directrice de recherche au CNRS, Centre d'analyse et de mathématiques sociales,
École des hautes études en sciences sociales

Grâce à un modèle qui s'appuie sur le contrôle moteur et motivationnel de la force de propulsion afin d'optimiser la dépense énergétique, l'effort et le temps final, nous déterminons comment les coureurs doivent adapter au mieux leur rythme afin de réaliser la meilleure performance.

INTRODUCTION

Aujourd'hui, grâce au système IsoLynx, à des capteurs placés sur les athlètes et une dizaine d'antennes sur le stade, des données de vitesse toutes les 100 ms peuvent être récupérées en championnat. Cela permet pour la télévision d'avoir des informations en temps réel sur le classement des coureurs, mais aussi, sans avoir à faire de mesures *in vivo* sur les athlètes d'avoir accès à toute la physiologie grâce à un modèle mathématique et des simulations reposant sur le contrôle optimal. On peut ainsi comprendre l'influence des paramètres physiologiques et mentaux dans la performance, comme nous allons le voir, et cela ouvre la compréhension de comment mieux s'entraîner (Le Hyaric *et al.*, 2024).

Grâce à la conservation de l'énergie et à la seconde loi de Newton on peut mettre la course en équations, en particulier un certain nombre de variables : $v(t)$ la vitesse de l'athlète, $f(t)$ sa force de propulsion par unité de masse, $u(t)$ son contrôle moteur, $e(t)$ son énergie anaérobie. L'énergie de l'athlète est en effet formée de deux parties : l'énergie aérobie, celle qui utilise l'oxygène qui est reliée au débit d'oxygène disponible, la VO_2 , transformé en énergie ; et l'énergie anaérobie, celle qui ne dépend pas de l'oxygène.

La puissance aérobie est notée dans nos équations $\sigma(e)$ car elle dépend également par un mécanisme de rétroaction de l'énergie anaérobie résiduelle, et non pas juste du temps ou de la distance parcourue. C'est ce mécanisme de rétroaction qui conduit à une bonne analyse des courses. Dans une course de sprint $\sigma(e)$ est une fonction linéaire décroissante de e , et donc une fonction croissante du temps (l'énergie anaérobie décroît avec le temps !). Pour les courses plus longues, la forme de la fonction $\sigma(e)$ tient compte de la cinétique de la VO_2 étudiée par les physiologistes (Hanon et Thomas, 2011) : au départ, la fonction croît tandis que e décroît, ensuite il y a un plateau et sur la fin de la course, la fonction décroît. Les équations proviennent de :

- la conservation de l'énergie : la puissance développée par la force de propulsion est égale à la variation d'énergie disponible, aérobie et anaérobie :

$$f(t)v(t) = -\frac{de}{dt} + \sigma(e(t))$$

- la seconde loi de Newton : l'accélération est égale à la somme des forces mises en jeu, qui sont la force de propulsion diminuée des forces de frottement :

$$\frac{dv}{dt} = f(t) - \frac{v(t)}{\tau}$$

Dans le modèle le plus simple, le frottement est linéaire en vitesse avec un coefficient de frottement T (relié à l'économie de course) mais aussi bien une côte qu'un frottement lié au vent peuvent être pris en compte dans cette équation.

- la théorie du contrôle moteur qui limite les variations de la force de propulsion selon :

$$\frac{df}{dt} = \gamma \left(u(t)(F_{max} - f(t)) - f(t) \right)$$

où γ et F_{max} sont des paramètres et $u(t)$ le contrôle effectué par le cerveau. Cette équation a été introduite dans Pessiglione *et al.* (2016) pour comprendre l'effet de la dopamine et la motivation.

Encadré : Les facteurs psychologiques

L'équation de contrôle moteur fait intervenir deux paramètres importants sur lesquels joue la motivation : l'intensité de l'action, modulée par F_{max} et la rapidité à exécuter l'action modulée par γ . En effet, si je suis fatigué ou peu motivé, je vais mettre du temps à enclencher une action de mes muscles, et je vais vouloir réduire l'intensité de l'effort que je dois produire.

Un autre élément psychologique joue dans l'effort : le fait de suivre quelqu'un. Ce n'est pas un effet aérodynamique pour se protéger du vent comme en vélo ; mais le fait de suivre le rythme de quelqu'un devant diminue l'effort à fournir à travers une diminution du frottement effectif T . C'est comme si l'on s'accrochait psychologiquement. Cela doit être pris en compte si l'on est derrière, mais pas si l'on vient d'être doublé, car il y a un temps de réaction quand on est doublé.

Le contrôle moteur est la capacité à varier sa force de propulsion due à la commande du cerveau sur les muscles. Mais trop de variations d'allure provoquent un coût dans l'effort, quantifié comme l'intégrale de u^2 . On a ainsi construit un modèle de coût et bénéfique reposant à la fois sur la mécanique, l'énergétique et le contrôle moteur. Cela permet, une fois que l'on se fixe une distance à courir, de déterminer comment optimiser son effort, gérer ses ressources et les contraintes pour faire le meilleur temps. Cela prend en compte la topographie du terrain (virages et côtes ou descentes), l'effet psychologique à avoir quelqu'un devant et la motivation. Évidemment, cela nécessite d'injecter des valeurs à tous les paramètres physiologiques, en particulier certains qu'on ne peut mesurer. Alors comment faire ? La puissance du modèle est qu'à partir de données très précises de vitesse, il identifie tous les paramètres physiologiques et donne alors accès non seulement à la courbe de vitesse spécifique à chaque distance, mais aussi la courbe de VO_2 , l'énergie anaérobie, la force de propulsion et permet de comprendre comment la stratégie optimale varie avec les paramètres physiologiques. Ce n'est pas de la *big data* ou des statistiques, mais un modèle déterministe. Dans le cas d'un virage, le modèle consiste à écrire une équation de contrôle moteur pour également la force additionnée de la force centrifuge.

Pour optimiser son effort, on montre que, du 100 au 400 m, on court en accélérant très fort au départ, puis en décélérant en fin de course. À partir du 800 m, la course se fait avec une réaccélération en fin de course, et à partir du 1 500 m, après une phase d'accélération initiale, il y a une partie centrale de la course à vitesse presque constante avant le sprint final.

LE SPRINT

Dans l'épreuve du 100 m, les athlètes ne passent pas la ligne d'arrivée en accélérant, mais plutôt en décélérant ! Ils arrêtent d'accélérer dès 60 ou 70 mètres, soit environ aux deux tiers de la course. C'est en fait qu'ils ne peuvent pas tenir leur effort maximal pendant toute la course, même si c'est l'impression qu'ils donnent.

On peut prouver grâce à la théorie du contrôle optimal (Aftalion, 2017) que la meilleure stratégie est de partir à force de propulsion maximale, ce qui détermine la vitesse comme une exponentielle croissante en début de course. Mais cette force maximale ne peut être maintenue sur tout l'exercice à cause du stock limité d'énergie anaérobie. Donc la force diminue, la vitesse aussi. Partir moins fort et accélérer tout au long de la course serait moins rentable au niveau du temps final. Cette stratégie de course est la même du 100 au 400 m, qui sont des courses où la VO_2 le débit d'oxygène, augmente, sans atteindre de palier.

Le 400 m est la plus longue course de sprint. Elle se court également en partant à fond et en essayant de ralentir le moins possible. Le maximum de vitesse est atteint avant les 100 premiers mètres donc dans le virage malgré la force centrifuge. Là les coureurs sont à plus de 10,5 m/s chez les hommes et 9,5 m/s chez les femmes. Ensuite, sur les 300 derniers mètres, il s'agit de décélérer le moins possible : cela provient à la fois d'une VO_2 élevée, d'une contribution anaérobie élevée et du couloir. Dans la Figure 1 (voir ci-dessous), nous avons analysé, sur le 400 m de Femke Bol aux championnats d'Europe de Munich en 2022, comment les différents paramètres jouent sur la courbe de vitesse et la performance.

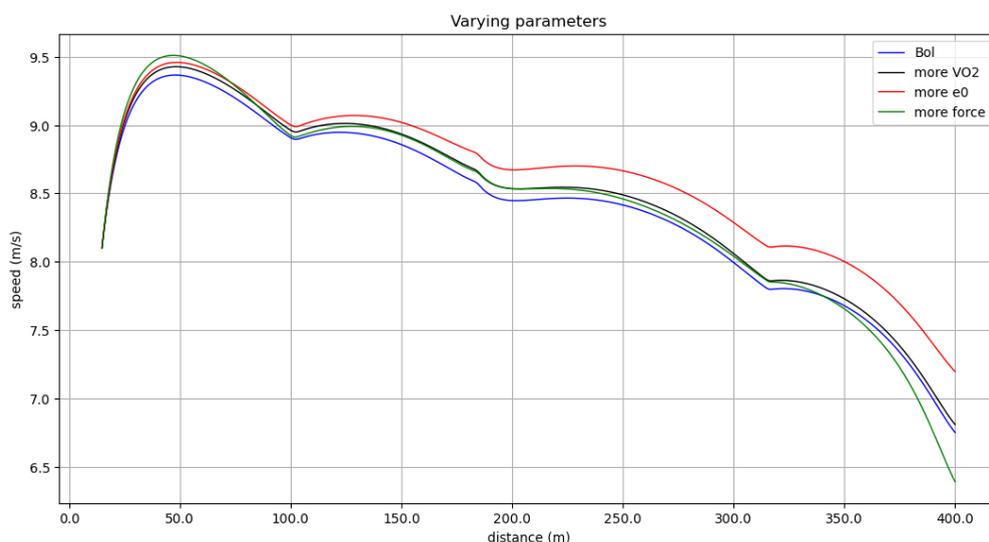


Figure 1 : Simulation de la course de Femke Bol lors du 400 m des championnats d'Europe de Munich en 2022 (courbe bleue) et simulations de la variation de paramètres physiologiques de 5 %. Avec une force de propulsion plus grande (courbe verte), elle part plus fort, mais décélère plus. Avec une énergie anaérobie plus grande (courbe rouge), la vitesse est plus grande sur l'ensemble de la course, et elle décélère moins fort. C'est pour cela qu'on dit que les *sprints* se courent en anaérobie. Avec une VO_2 plus grande (courbe noire), elle peut se permettre de partir plus fort et donc d'utiliser son énergie anaérobie en début de course, car elle puisera sur la source aérobie en fin de course

(Source : D'après Le Hyaric *et al.*, 2024).

ENDURANCE

Une course d'endurance est caractérisée par le fait que la VO_2 , le débit d'oxygène, augmente pour atteindre un palier et enfin diminue. Pour les courses sur piste, c'est le cas à partir du 1 500 m. Une course d'endurance se court en trois parties : une phase d'accélération pour atteindre une vitesse pic qui est supérieure à la vitesse de croisière afin de lancer le cycle aérobie ; une phase intermédiaire de course qui repose essentiellement sur l'énergie aérobie ; et une phase de *sprint* finale qui repose sur l'énergie anaérobie résiduelle. Sur les courses longues, il peut y avoir des effets stratégiques (Mercier *et al.*, 2021).

La tactique gagnante d'Ingebrigtsen lors de la finale européenne du 1 500 m en 2022 (Le Hyaric *et al.*, 2024) consiste à adopter un rythme de croisière très rapide à partir de 300 m, ce qui est possible parce qu'il est capable de maintenir une valeur de VO_2 élevée jusqu'à la fin de la course et qu'il dispose d'une contribution anaérobie importante. Il a une cinétique de VO_2 plus rapide que ses adversaires (voir la Figure 2 ci-dessous), qui ne nécessite pas un départ aussi rapide, mais il accélère ensuite dans les deux derniers tours. L'étude montre que c'est l'amélioration du métabolisme aérobie, et la capacité à tenir sa VO_2 qui a le plus d'effet sur la performance au 1 500 m. L'intérêt du modèle est qu'il permet d'étudier la variation de performance en fonction de chaque paramètre physiologique (voir la Figure 2), sans avoir recours à des mesures *in vivo*, impossibles sur des courses de championnat.

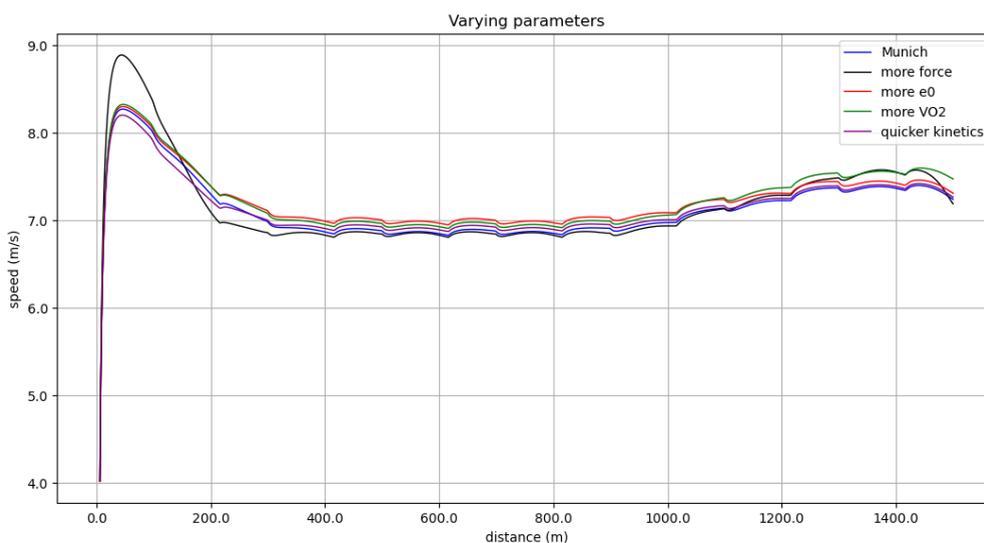


Figure 2 : Simulation de la course de Jakob Ingebrigtsen lors du 1 500 m des championnats d'Europe de Munich en 2022 (courbe bleue) et simulations de la variation de paramètres physiologiques de 5 %. Avec une cinétique de VO_2 plus rapide (courbe violette), il peut se permettre de partir moins fort, car la VO_2 se met en place rapidement seule. Cela lui économise de l'énergie anaérobie et lui permet de courir à un rythme de croisière plus élevé. C'est une des forces de Ingebrigtsen par rapport à des concurrents. Avec une VO_2 élevée (courbe verte) ou une énergie anaérobie plus élevée (courbe rouge) il fait toute la course plus vite. Et avec une force de propulsion plus grande (courbe noire), il part plus fort et accélère mieux sur le *sprint* final (Source : D'après Le Hyaric *et al.*, 2024).

ET LE COULOIR ?

Mais il faut aussi comprendre, pour les courses en couloir, les effets corrélés de la force centrifuge (qui devient moins importante au fur et à mesure qu'on s'éloigne vers les couloirs extérieurs) et de l'attraction psychologique générée par un athlète devant. Dans les couloirs extérieurs, on court en aveugle, ce qui est pénalisant. Il a été en effet mesuré qu'un athlète faisant un tour de stade (400 m) derrière « un lièvre » peut gagner jusqu'à une seconde par rapport à courir seul. Ce n'est pas juste un effet pour se protéger du vent comme les cyclistes, c'est un effet psychologique, car on n'a pas à réfléchir à son rythme et on tient plus longtemps. Pour une course de 200 m, le départ se fait dans le virage. Il faut prendre en compte dans le modèle une diminution du frottement effectif si l'on a quelqu'un devant. On calcule (Aftalion et Martinon, 2019) que la performance est la meilleure pour les lignes 4 à 6 où l'effet de la force centrifuge et l'effet psychologique se conjuguent. Ensuite les lignes 7 et 3, puis 8 et 2 sont équivalentes mais le couloir 1 est fortement pénalisé. Ceci est finalement cohérent avec le tirage au sort des compétitions qui consiste à mettre les meilleurs coureurs dans les lignes 3 à 6 qui permettent les meilleures performances. Dans les nouveaux stades, comme à Budapest, il y a 9 couloirs, et les courses en couloirs se font dans les lignes 2 à 9, ce qui évite la ligne 1.

LE STADE OPTIMAL

Une question naturelle est ensuite de se demander quelle est la forme du stade optimal permettant de battre les records actuels, réduisant les écarts entre les couloirs et éventuellement contenant les stades de football et de rugby. La piste optimale est évidemment la ligne droite. Si l'on impose une piste fermée, la piste optimale est une piste circulaire de 63 mètres de rayon. Ceci a des inconvénients notables en matière de visibilité des spectateurs, mais avait pourtant été évoqué dans les années 1960 en France. Si l'on impose que la piste doit contenir des lignes droites, afin de se rapprocher d'un 100 m en ligne droite, la piste optimale est alors formée de deux lignes droites et deux demi-cercles. Mais le calcul de performance nous indique en fait que plus la ligne droite est courte, meilleur est le temps du champion. Pour une ligne droite de moins de 60 mètres, la différence de temps se fait au millième avec la course entière en ligne droite. Mais entre une ligne droite de 60 mètres et une de 84,39 m, on gagne 2 centièmes sur un 200 m, mais surtout on réduit l'écart entre les lignes extrêmes de 8 à 2 centièmes. Pour le 10 000 m, cela permettrait de gagner entre 5 et 10 secondes. En effet, plus la ligne droite est courte, plus le rayon du virage est large, et donc meilleure est la performance.

Le souci d'un tel stade est qu'il serait du coup un peu court pour le javelot et éloignerait les spectateurs de l'arène. Dans Aftalion et Trélat (2020), nous avons proposé un stade optimal contenant les stades de football et rugby en raccourcissant les lignes droites et rajoutant une portion de ligne droite au milieu du virage (partie verticale). En effet les stades standards avec virage en demi-cercle ne contiennent pas de stade de rugby. Seuls les stades en anse de panier le font, mais ils sont très mauvais pour la performance et surtout génèrent des différences de plusieurs dixièmes entre les lignes extrêmes. Mais un nouveau stade comme illustré sur la Figure 3 (voir page suivante) n'est pas encore homologué par la fédération internationale d'athlétisme. Une inquiétude est qu'il devienne à terme trop court pour le javelot.

Mais avec le nouveau concept de piste courte (piste de 200 m et non pas 400, mais pas forcément intérieure, potentiellement en ville, extérieure et démontable) introduit en novembre 2023, on peut s'attendre à ce que les records obtenus en *indoor* soient battus avec des lignes droites plus courtes et des angles d'inclinaison plus importants sur des pistes extérieures démontables. Nous verrons si certaines villes se lancent dans l'aventure et les records des pistes de Liévin (Hauts-de-France) sont battus.

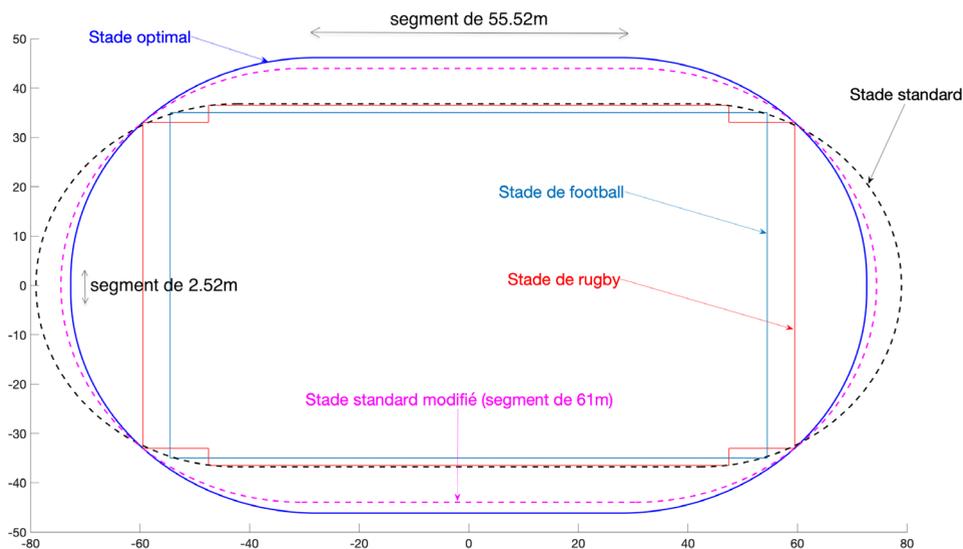


Figure 3 : Stade standard (noir) avec ligne droite de 84,39 m et rayon de 36,5 m et stade avec ligne droite raccourcie à 61 m (rose). Stade de football en bleu clair, de rugby en rouge et stade optimal contenant le football et le rugby (bleu)
(Source : D'après Aftalion et Trélat, 2020).

RÉFÉRENCES

- AFTALION A. (2017), "How to run 100 meters", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 77(4), pp. 1320-1334.
- AFTALION A. (2023), *Pourquoi est-on penché dans les virages ? - Le sport expliqué par les sciences en 40 questions*, CNRS Éditions, 168 pages.
- AFTALION A & MARTINON P. (2019), "Optimizing running a race on a curved track", *Plos one*, 14(9), p. 0221572.
- AFTALION A & TRÉLAT E. (2020), "How to build a new athletic track to break records", *Royal Society open science*, 7(3), p. 200007.
- HANON C. & THOMAS C. (2011), "Effects of optimal pacing strategies for 400-, 800-, and 1500-m races on the VO_2 response", *Journal of sports sciences*, 29(9), pp. 905-912.
- LE BOUC R., RIGOUX L., SCHMIDT L., DEGOS B., WELTER M. L., VIDAILHET M. & PESSIGLIONE M. (2016), "Computational dissection of dopamine motor and motivational functions in humans", *Journal of Neuroscience*, 36(25), pp. 6623-6633.
- LE HYARIC A., AFTALION A. & HANLEY B. (2024), "Modelling the optimization of world-class 400 m and 1,500 m running performances using high-resolution data", *Frontiers in Sports and Active Living*, 6, p. 1293145.
- MERCIER Q., AFTALION A. & HANLEY B. (2021), "A model for world-class 10,000 m running performances: Strategy and optimization", *Frontiers in Sports and Active Living*, 2, p. 636428.