

6. Contraction des électrons (Contraction des particules chargées)

Supposons un électron unique animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. D'après ce que nous venons de voir, on peut, grâce à la transformation de Lorentz, ramener l'étude du champ déterminé par cet électron au cas où l'électron serait immobile ; la transformation de Lorentz remplace donc l'électron réel en mouvement par un électron idéal immobile.

Soit \mathbf{E} , \mathbf{B} le champ réel ; soit \mathbf{E}' , \mathbf{B}' ce que devient le champ après la transformation de Lorentz, de sorte que le champ idéal \mathbf{E}' , \mathbf{B}' correspond au cas d'un électron immobile ; on a :

$$\mathbf{E}' = -\nabla\varphi' \quad ; \quad \mathbf{B}' = 0 \quad (170)$$

et pour le champ réel (en vertu des équations (32)) :

$$E_x = l^2 E_x' \quad ; \quad E_y = \gamma l^2 E_y' \quad ; \quad E_z = \gamma l^2 E_z' \quad ; \quad \mathbf{B} = (\gamma\beta l^2, 0, 0) \times \mathbf{E}' = (\beta, 0, 0) \times \mathbf{E} \quad (171)$$

Il s'agit maintenant de déterminer l'énergie totale due au mouvement de l'électron, l'action correspondante et la quantité de mouvement électromagnétique, afin de pouvoir calculer les masses électromagnétiques de l'électron. Pour un point éloigné, il suffit de considérer l'électron comme réduit à un point unique ; on est ainsi ramené aux formules (161)-(162) qui généralement peuvent convenir. Mais ici elles ne sauraient suffire, parce que l'énergie est principalement localisée dans les parties de l'éther les plus voisines de l'électron.

On peut faire à ce sujet plusieurs hypothèses.

D'après celle d'Abraham, les électrons seraient sphériques et indéformables.

Alors quand on appliquerait la transformation de Lorentz, comme l'électron réel serait sphérique, l'électron idéal deviendrait un ellipsoïde. L'équation de cet ellipsoïde se déduit des équations (8) (et en particulier de $x - \beta t = x' / \gamma l$) :

$$\text{électron réel à un instant } t : \quad (x - \beta t)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (172)$$

électron idéal (c'est à dire le même électron dans les axes animés de la vitesse $(\beta, 0, 0)$ dans lesquels la vitesse de l'électron est nulle) :

$$(x'^2 / \gamma^2) + y'^2 + z'^2 = l^2 r^2 \quad (173)$$

Si le rayon de l'électron est r , les axes de l'électron idéal seraient donc :

$$\gamma l r \quad ; \quad l r \quad ; \quad l r \quad (174)$$

Dans l'hypothèse de Lorentz, au contraire, les électrons en mouvement seraient déformés de telle façon que ce serait l'électron réel qui deviendrait un ellipsoïde, tandis que l'électron idéal immobile serait toujours un sphère de rayon r ; les axes de l'électron réel seront alors :

$$r / \gamma l \quad ; \quad r / l \quad ; \quad r / l \quad (175)$$

Désignons par :

$$A = \int (\epsilon E_x^2 / 2) d\tau \quad (176)$$

l'énergie électrique longitudinale ; par :

$$B = \int [\epsilon (E_y^2 + E_z^2) / 2] d\tau \quad (177)$$

l'énergie électrique transversale et par :

$$C = \int [(B_y^2 + B_z^2) / 2\mu] d\tau \quad (178)$$

l'énergie magnétique transversale. Il n'y a pas d'énergie magnétique longitudinale puisque $B_x = B_x' = 0$.

Désignons par A , B' , C les quantités correspondantes dans le système idéal. On trouve d'abord :

$$C = 0 \quad ; \quad C = \mu\epsilon\beta^2 B \quad (179)$$

D'autre part, nous pouvons observer que le champ réel dépend seulement de $x - \beta t$, y et z , et écrire :

$$\begin{aligned} d\tau &= d(x - \beta t) dy dz \\ d\tau' &= dx' dy' dz' = \gamma l^3 d\tau \end{aligned} \quad (180)$$

d'où :

$$A = \gamma A / l \quad ; \quad B' = B / \gamma l \quad ; \quad A = l A / \gamma \quad ; \quad B = \gamma l B' \quad (181)$$

Dans l'hypothèse de Lorentz, on a $B' = 2 A'$, et A' , inversement proportionnel au rayon de l'électron, est une constante indépendante de la vitesse de l'électron réel ; on trouve ainsi pour l'énergie totale :

$$A + B + C = \gamma l A (3 + \beta^2) \quad (182)$$

et pour l'action (par unité de temps) :

$$A + B - C = 3 l A / \gamma \quad (183)$$

Calculons maintenant la quantité de mouvement électromagnétique ; nous trouverons :

$$P = \int \mu\epsilon (E_y H_z - E_z H_y) d\tau = \int \epsilon\beta (E_y^2 + E_z^2) d\tau = 2\beta B = 4\beta\gamma l A \quad (184)$$

Mais on doit avoir certaines relations entre l'énergie totale $E = A + B + C$, l'action par unité de temps $L = A + B - C$, et la quantité de mouvement P . La première de ces relations est :

$$E = L - \beta (dL / d\beta) \quad (185)$$

La seconde est :

$$dP / d\beta = (dE / d\beta) / \beta \quad (186)$$

(les dérivées par rapport à β sont obtenues en considérant γ et l comme des fonctions de β).

Ces deux relations dérivent de :

$$P = -(dL / d\beta) \quad ; \quad E = L + \beta P \quad (187)$$

La seconde des équations (187) est toujours satisfaite ; mais la première ne l'est que si :

$$l = (1 - \beta^2)^{1/6} = \gamma^{(-1/3)} \quad (188)$$

c'est à dire si le volume de l'électron idéal est égal à celui de l'électron réel, ou encore si le volume de l'électron est constant ; c'est l'hypothèse de Langevin.

Cela est en contradiction avec le résultat de la section 4 (''Le groupe de Lorentz'') et avec le résultat de Lorentz obtenu par une autre voie. C'est cette contradiction qu'il s'agit d'expliquer.

Avant d'aborder cette explication, j'observe que, quelle que soit l'hypothèse adoptée, nous aurons :

$$L = A + B - C = (l / \gamma) (A + B) \quad (189)$$

ou, à cause de $C = 0$:

$$L = (l / \gamma) L' \quad (190)$$

Nous pouvons rapprocher ce résultat de l'équation (105) : $J' = J$.

Nous avons en effet :

$$J = \int L dt \quad ; \quad J' = \int L' dt' \quad (191)$$

Nous observons que l'état du système dépend seulement de $x - \beta t$, y et z , c'est à dire de x' , y' , z' et que nous avons :

$$t' = (l t / \gamma) - \beta x' \quad ; \quad dt' = l dt / \gamma \quad (192)$$

ce qui, avec (190) et (191) donne bien $J = J'$ ».

* Nous retrouvons ici une fois encore le rapport dt' / dt de la dilatation des temps à x' fixé tel qu'on peut l'obtenir dès les équations (1).

« Plaçons nous dans une hypothèse quelconque, qui pourra être, soit celle de Lorentz, soit celle d'Abraham, soit celle de Langevin, soit une hypothèse intermédiaire.

Soient :

$$r ; \theta r ; \theta r \quad (193)$$

les trois axes de l'électron réel ; ceux de l'électron idéal seront :

$$\gamma |r ; \theta |r ; \theta |r \quad (194)$$

Alors $A' + B'$ sera l'énergie électrostatique due à un ellipsoïde ayant pour axes $\gamma |r ; \theta |r ; \theta |r$.

Que l'on suppose l'électricité répandue à la surface de l'électron comme à celle d'un conducteur, ou uniformément répandue à l'intérieur de cet électron, cette énergie sera de la forme :

$$A' + B' = f(\theta / \gamma) / \gamma |r \quad (195)$$

où f est une fonction connue (* voir ci-dessous l'équation (201)).

L'hypothèse d'Abraham consiste à supposer :

$$r = \text{constante} ; \theta = 1 \quad (196)$$

Celle de Lorentz :

$$l = 1 ; \gamma r = \text{constante} ; \theta = \gamma \quad (197)$$

Celle de Langevin :

$$l = \gamma^{-1/3} ; \gamma = \theta ; \gamma |r = \text{constante} \quad (198)$$

On trouve ensuite (en accord avec (189) et (195)):

$$L = f(\theta / \gamma) / \gamma^2 r \quad (199)$$

Abraham trouve, à la différence des notations près (*Göttingen Nachrichten*, 1902, p. 37):

$$L = [a (1 - \beta^2) / r \beta] . \text{Log} [(1 + \beta) / (1 - \beta)] \quad (200)$$

a étant une constante. Or dans l'hypothèse d'Abraham, on a $\theta = 1$; donc :

$$f(1 / \gamma) = [a \gamma^2 (1 - \beta^2) / \beta] . \text{Log} [(1 + \beta) / (1 - \beta)] = (a / \beta) . \text{Log} [(1 + \beta) / (1 - \beta)] \quad (201)$$

ce qui définit la fonction f .

Cela posé, imaginons que l'électron soit soumis à une liaison, de telle façon qu'il y ait une relation entre r et θ ; dans l'hypothèse de Lorentz cette relation serait $\theta r = \text{constante}$, dans celle de Langevin $\theta^2 r^3 = \text{constante}$. Nous supposerons d'une façon plus générale :

$$r = b \theta^m \quad (202)$$

b étant une constante ; d'où :

$$L = f(\theta / \gamma) / b \gamma^2 \theta^m \quad (203)$$

Quelle forme prendra un électron quand la vitesse deviendra β , si l'on ne suppose pas l'intervention d'autres forces que celles de liaison ? Cette forme sera définie par l'égalité :

$$dL / d\theta = 0 \quad (204)$$

ou :

$$- m \theta^{(-m-1)} f + \theta^{-m} f' / \gamma = 0 \quad (205)$$

ou :

$$f' / f = m \gamma / \theta \quad (206)$$

Si nous voulons que l'équilibre ait lieu de telle façon que $\theta = \gamma$, il faut que pour $\theta / \gamma = 1$, la dérivée logarithmique de f soit égale à m .

Si nous développons $1 / \gamma$ et le second membre de (201) suivant les puissances de β , l'équation (201) devient :

$$\text{pour } u = 1 / \gamma = (1 - \beta^2/2) : f(u) = a . (1 + \beta^2/3) \quad (207)$$

en négligeant les puissances supérieures de β .

En différentiant, il vient (* avec $f'(u) = df/du$) :

$$- \beta f'(u) = 2 a \beta / 3 \quad (208)$$

Pour $\beta = 0$, c'est à dire quand $u = 1$, ces équations deviennent :

$$f = a \quad ; \quad f' = -2 a / 3 \quad ; \quad f'/f = -2 / 3 \quad (209)$$

On doit donc avoir $m = -2 / 3$, conformément à l'hypothèse de Langevin.

Ce résultat doit être rapproché de celui qui est relatif à la première équation de (187) et dont en réalité il ne diffère pas. En effet, supposons que tout élément $d\tau$ de l'électron soit soumis à une force $X d\tau$ parallèle à l'axe des x , X étant le même pour tous les éléments ; nous aurons alors, conformément à la définition de la quantité de mouvement :

$$dP / dt = \int X d\tau \quad (210)$$

D'autre part, le principe de moindre action nous donne :

$$J = \int L dt \quad ; \quad \delta J = \int X \delta U d\tau dt = \int \delta U (dP / dt) dt \quad (211)$$

δU étant le déplacement du centre de masse de l'électron dans la direction de Ox .

L dépend de θ et de r ; si l'on admet que r est lié à θ par l'équation de liaison, on a alors :

$$(212) \quad \delta J = \int [(\partial L / \partial \beta) \delta \beta + (\partial L / \partial \theta) \delta \theta] dt$$

D'autre part :

$$\delta \beta = d(\delta U) / dt$$

(213)

d'où, en intégrant par parties :

$$(214) \quad \int P \delta \beta dt = - \int \delta U (dP / dt) dt = - \delta J$$

donc les expressions de δJ en (212) et (214) conduisent à :

$$(215) \quad \partial L / \partial \beta = -P \quad ; \quad \partial L / \partial \theta = 0$$

Mais la dérivée $(dL / d\beta)$ de l'équation (187) est prise en supposant θ exprimé en fonction de β , de sorte que :

$$(216) \quad dL / d\beta = (\partial L / \partial \beta) + (\partial L / \partial \theta) \cdot d\theta / d\beta$$

L'équation (187) équivaut donc à l'équation (204).

D'où la conclusion : si l'électron est soumis à une liaison entre ses trois axes, **et si aucune autre force n'intervient en dehors des forces de liaisons**, la forme que prendra cet électron, quand il sera animé d'une vitesse uniforme, ne pourra être telle que l'électron idéal correspondant soit une sphère, que dans le cas où la liaison sera la constance du volume, conformément à l'hypothèse de Langevin.

Nous sommes ainsi amenés de la sorte à nous poser le problème suivant :

Quelles forces supplémentaires, autres que les forces de liaison, serait-il nécessaire de faire intervenir pour rendre compte de la loi de Lorentz ou, plus généralement, de toute loi autre que celle de Langevin ?

L'hypothèse la plus simple, et la première que nous devons examiner, c'est que ces forces supplémentaires admettent un potentiel spécial dérivant des trois axes de l'ellipsoïde, par conséquent de θ et de r ; soit $F(\theta, r)$ ce potentiel ; dans ce cas l'action aura pour expression :

$$J = \int [L + F(\theta, r)] dt \quad (217)$$

et les conditions d'équilibre s'écriront :

$$\partial (L + F) / \partial \theta = 0 \quad ; \quad \partial (L + F) / \partial r = 0 \quad (218)$$

Si nous supposons r et θ liés par la relation $r = b \theta^m$, nous pourrions regarder r comme fonction de θ , envisager F comme ne dépendant que de θ et conserver seulement la première équation de (218) avec, selon (203) :

$$L = f(\theta / \gamma) / b \gamma^2 \theta^m \quad ; \quad \partial L / \partial \theta = [\theta f' - m f] / b \gamma^2 \theta^{m+1} \quad (220)$$

Il faut que, pour $\gamma = \theta$, l'équation (218) soit satisfaite ; ce qui donne, en tenant compte des équations (209) (*pour lesquelles précisément on a $\theta / \gamma = 1$*) :

$$dF / d\theta = (3m + 2) a / 3b \theta^{(m+3)}$$

(221)

d'où :

$$F = - (3m + 2) a / (3m + 6) b \theta^{(m+2)} \quad (222)$$

et dans l'hypothèse de Lorentz où $m = -1$:

$$F = a / 3b\theta \quad (223)$$

Supposons maintenant qu'il n'y ait *aucune* liaison et, considérant r et θ comme deux variables indépendantes, conservons les deux équations (8) ; il viendra selon (199) :

$$L = f(\theta / \gamma) / \gamma^2 r \quad ; \quad \partial L / \partial \theta = f' / \gamma^2 r \quad ; \quad \partial L / \partial r = - f / \gamma^2 r^2 \quad (224)$$

Les équations (218) doivent être satisfaites pour $\gamma = \theta$; $r = b\theta^m$; ce qui donne :

$$\partial F / \partial r = a / b^2 \theta^{(2m+2)} \quad ; \quad \partial F / \partial \theta = 2a / 3b \theta^{(m+3)} \quad (225)$$

Une des manières de satisfaire à ces conditions est de poser :

$$F = K r^\alpha \theta^\beta \quad (226)$$

K , α et β étant des constantes ; les équations (225) doivent être satisfaites pour $r = b \theta^m$, ce qui donne (*en éliminant r*) :

$$K \alpha b^{(\alpha-1)} \theta^{(m\alpha - m + \beta)} = a / b^2 \theta^{(2m+2)} \quad ; \quad K \beta b^\alpha \theta^{(m\alpha + \beta - 1)} = 2a / 3b \theta^{(m+3)} \quad (227)$$

En identifiant, on trouve :

$$\alpha = 3 \zeta \quad ; \quad \beta = 2 \zeta \quad ; \quad \zeta = - (m + 2) / (3m + 2) \quad ; \quad K = a / \alpha b^{(\alpha+1)} \quad (228)$$

Mais le volume de l'ellipsoïde est proportionnel à $r^3 \theta^2$, de sorte que le potentiel supplémentaire est proportionnel à la puissance ζ du volume de l'électron.

Dans l'hypothèse de Lorentz, on a $m = -1$, $\zeta = 1$.

On retrouve donc l'hypothèse de Lorentz à la condition d'ajouter un potentiel supplémentaire proportionnel au volume de l'électron.

L'hypothèse de Langevin correspond à $\zeta = \infty$.

7. Mouvement quasi stationnaire.

* *Peut-être devons nous construire toute une nouvelle mécanique que nous ne faisons qu'entrevoir, où l'inertie croissant avec la vitesse, la vitesse de la lumière deviendrait une limite infranchissable.*

H. Poincaré

L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique(1904)²²

Il reste à voir si cette hypothèse sur la contraction des électrons rend compte de l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu, et je commencerai par étudier le mouvement quasi stationnaire d'un électron isolé, ou soumis seulement à l'action d'autres électrons éloignés.

On sait qu'on appelle *mouvement quasi stationnaire* un mouvement où les variations de la vitesse sont assez lentes pour que les énergies magnétique et électrique dues au mouvement de l'électron diffèrent de ce qu'elles seraient dans le mouvement uniforme ; on

22 Poincaré H. *L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique*. Bulletin des Sciences Mathématiques. Tome 28, 2^e série (réorganisée 39-1) page 325. Novembre 1904.

sait également que c'est en partant de cette notion du mouvement quasi stationnaire qu'Abraham est arrivé à celles des masses électromagnétiques transversale et longitudinale.

Je crois devoir préciser. Soit L notre action par unité de temps :

$$L = \int d\tau [(\epsilon \mathbf{E}^2/2) - (\mathbf{B}^2/2\mu)] \quad (229)$$

où nous ne considérerons pour le moment que les champs électrique et magnétique dus au mouvement d'un électron isolé. Dans la section précédente, considérant le mouvement comme uniforme, nous regardions L comme dépendant de la vitesse \mathbf{v} du centre de masse de l'électron (avec alors $\mathbf{v} = (\beta, 0, 0)$) et des paramètres r et θ qui définissent la forme de l'électron.

Mais si le mouvement n'est plus uniforme, L dépendra non seulement des valeurs de \mathbf{v} , r , θ à l'instant considéré, mais aussi des valeurs de ces mêmes quantités à d'autres instants qui pourront en différer de quantités du même ordre que le temps mis par la lumière pour aller d'un point à un autre de l'électron ; en d'autres termes, L dépendra non seulement de \mathbf{v} , r , θ , mais de leurs dérivées de tous les ordres par rapport au temps.

Eh bien, le mouvement sera dit *quasi stationnaire* quand les dérivées partielles de L par rapport aux dérivées successives de \mathbf{v} , r , θ seront négligeables devant les dérivées partielles de L par rapport aux quantités \mathbf{v} , r , θ elles mêmes.

Les équations d'un pareil mouvement pourront s'écrire :

$$\partial (L + F) / \partial \theta = 0 \quad ; \quad \partial (L + F) / \partial r = 0 \quad (230)$$

$$d(\partial L / \partial \mathbf{v}) / dt = - \int \mathbf{f} d\tau \quad (231)$$

Dans ces équations F a la même signification que dans la section précédente (* *Dans le cas de Lorentz : $F = K r^3 \theta^2$ et $L = f(u)/\gamma^2 r$ avec $u = \theta/\gamma$ et la fonction $f(u)$ donnée en (201)*); \mathbf{f} est la force par unité de volume qui agit sur l'électron : cette force étant due uniquement aux champs électrique et magnétique produits par les *autres* électrons.

Observons que L ne dépend de \mathbf{v} que par l'intermédiaire de son module v :

$$v = |\mathbf{v}| = [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]^{1/2} \quad (232)$$

On a donc en appelant encore P la quantité de mouvement et \mathbf{P} le vecteur quantité de mouvement (* *et en généralisant la première équation de (215)*):

$$-\partial L / \partial \mathbf{v} = -\mathbf{v} (\partial L / \partial v) / v = \mathbf{P} \mathbf{v} / v = \mathbf{P} \quad (233)$$

d'où :

$$d(-\partial L / \partial \mathbf{v}) / dt = [\mathbf{P} (dv/dt) / v] - [\mathbf{P} \mathbf{v} (dv/dt) / v^2] + [(d\mathbf{P}/dv)(dv/dt)\mathbf{v} / v] \quad (234)$$

avec :

$$v (dv/dt) = \mathbf{v} (dv/dt) \quad (235)$$

Si nous prenons la direction actuelle de la vitesse pour axe des x il vient à l'instant considéré:

$$\mathbf{v} = (v_x, 0, 0) = (v, 0, 0) \quad ; \quad dv_x/dt = dv/dt \quad (236)$$

Avec (231) et (233) l'équation (234) devient :

$$\begin{aligned} dP_x/dt &= -d(\partial L / \partial v_x) / dt = \int f_x d\tau = (d\mathbf{P}/dv) (dv_x/dt) & | \\ dP_y/dt &= -d(\partial L / \partial v_y) / dt = \int f_y d\tau = (P/v)(dv_y/dt) & | \end{aligned} \quad (237)$$

C'est pourquoi Abraham a donné à $(d\mathbf{P}/dv)$ le nom de *masse longitudinale* et à (P/v) le nom de *masse transversale* ; rappelons que $\mathbf{P} = -(\partial L / \partial \mathbf{v})$ ».

* Ces notions de "masse longitudinale" et de "masse transversale", fonctions croissantes de la vitesse, sont destinées à conserver l'équation fondamentale de la dynamique, c'est à dire : force = masse × accélération ; mais bien sûr elles entraînent de nombreuses confusions.

Sans doute est il plus simple d'écrire que la loi fondamentale de la dynamique est $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ (la force totale appliquée est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement) et que ce vecteur quantité de mouvement \mathbf{P} , égal à $m\mathbf{v}$ en mécanique classique, devient $m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1-v^2}$ mécanique relativiste de Lorentz ; la vitesse de la lumière étant prise pour unité . Le coefficient m_0 est alors une constante, c'est la "masse au repos" du corps étudié.

« Dans l'hypothèse de Lorentz on obtient [avec (203), $\theta = \gamma$, $f(1) = a$ et $m = -1$] :

$$L = (a/b) \sqrt{1-v^2} \quad ; \quad \mathbf{P} = -dL/dv = (a/b) \mathbf{v} / \sqrt{1-v^2} \quad (238) \gg$$

* La "masse au repos" m_0 est égale à la constante a/b soit $3^{1/4} (a)^{3/4} K^{1/4}$.

En conséquence la "masse longitudinale" dP/dv vaut $m_0 (1-v^2)^{-3/2}$ et la "masse transversale" P/v vaut $m_0 (1-v^2)^{-1/2}$; la constante m_0 est bien la "masse au repos" aussi bien longitudinale que transversale.

« Je pose :

$$\sqrt{1-v^2} = h \quad (239)$$

d'où :

$$\mathbf{P} = m_0 \mathbf{v} / h \quad ; \quad d\mathbf{P} / dv = m_0 / h^3 \quad ; \quad [(d\mathbf{P} / dv) / v^2] - \mathbf{P} / v^3 = m_0 / h^3 \quad (240)$$

Nous poserons encore :

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{f} d\tau = \text{force totale appliquée à l'électron} \quad (241)$$

et nous trouverons pour l'équation du mouvement quasi stationnaire :

$$[(d\mathbf{v} / dt) / h] + [\mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} / dt) / h^3] = \mathbf{F} / m_0 \quad (242) \gg$$

* On remarquera l'identité de ce résultat avec la loi fondamentale de la dynamique relativiste présentée vingt lignes plus haut : $\mathbf{F} = d\mathbf{P} / dt$ avec le vecteur quantité de mouvement $\mathbf{P} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{1-v^2}$.

« Voyons ce que deviennent ces équations par la transformation de Lorentz. Nous poserons :

$$1 - \beta v_x = \lambda \quad (243)$$

et nous aurons d'abord :

$$\lambda v_x' = v_x - \beta \quad ; \quad \lambda v_y' = v_y / \gamma \quad ; \quad \lambda v_z' = v_z / \gamma \quad (244)$$

d'où, avec $h' = \sqrt{1-v'^2}$, l'on tire aisément :

$$\lambda h' = h / \gamma \quad (245)$$

Nous avons également :

$$dt' = \gamma \lambda dt \quad (246)$$

d'où :

$$\begin{aligned} dv_x' / dt' &= (dv_x / dt) / \gamma^3 \lambda^3 \quad ; \quad dv_y' / dt' = [(dv_y / dt) / \gamma^2 \lambda^2] + [(dv_x / dt) v_y \beta / \gamma^2 \lambda^3] \quad | \\ dv_z' / dt' &= [(dv_z / dt) / \gamma^2 \lambda^2] + [(dv_x / dt) v_z \beta / \gamma^2 \lambda^3] \quad | \end{aligned} \quad (247)$$

d'où encore :

$$\mathbf{v}' \cdot (d\mathbf{v}' / dt') = [(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} / dt) / \gamma^3 \lambda^3] - [(dv_x / dt) \beta h^2 / \gamma^3 \lambda^4] \quad (248)$$

Posons d'autre part par analogie avec (242) :

$$[(d\mathbf{v}' / dt') / h'] + [\mathbf{v}' (\mathbf{v}' \cdot d\mathbf{v}' / dt') / h'^3] = \mathbf{F}' / m_0 \quad (249)$$

Cette équation du mouvement dans le second système d'axes définit une force \mathbf{F}' et l'idéal serait que la correspondance $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}'$ soit identique à la correspondance obtenue par l'analyse des phénomènes électromagnétiques en (2), (4) ou bien encore en (17), (38).

Compte-tenu de $l = 1$, cette première correspondance conduisait à :

$$F_x' = (F_x - \beta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) / \lambda \quad ; \quad F_y' = F_y / \gamma \lambda \quad ; \quad F_z' = F_z / \gamma \lambda \quad ; \quad \{ \lambda = 1 - \beta v_x \} \quad (250)$$

Avec les équations (242)-(249) ci-dessus ceci est aisé à vérifier, quoique un peu long.

$$\begin{aligned} F_x' / m_0 &= [(dv_x' / dt') / h'] + [v_x' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}\mathbf{v}' / dt) / h'^3] = \\ &= [(dv_x / dt) / h \gamma^2 \lambda^2] + (v_x - \beta) \{ [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\mathbf{v} / dt) / h^3 \lambda] - [(dv_x / dt) \beta / h \lambda^2] \} \end{aligned} \quad (251)$$

tandis que :

$$(F_x - \beta \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) / m_0 \lambda = [(dv_x / dt) / h \lambda] + [v_x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\mathbf{v} / dt) / h^3 \lambda] - \beta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\mathbf{v} / dt) [(1 / h \lambda) + (v^2 / h^3 \lambda)] \quad (252)$$

Il est maintenant aisé de vérifier l'identité des seconds membres de (251) et (252).

De même :

$$\begin{aligned} F_y' / m_0 &= [(dv_y' / dt') / h'] + [v_y' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{d}\mathbf{v}' / dt) / h'^3] = \\ &= [(dv_y / dt) / h \gamma \lambda] + [\beta v_y (dv_x / dt) / h \gamma \lambda^2] + (v_y / h^3 \gamma \lambda^2) [\lambda (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\mathbf{v} / dt) - \beta h^2 (dv_x / dt)] \end{aligned} \quad (253)$$

tandis que :

$$F_y / m_0 \gamma \lambda = [(dv_y / dt) / h \gamma \lambda] + [v_y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\mathbf{v} / dt) / h^3 \gamma \lambda] \quad (254)$$

ce qui est bien identique à (253).

Symétriquement il en est de même pour F_z et F_z' .

Ainsi les équations du mouvement quasi stationnaire ne sont pas altérées par la transformation de Lorentz; mais cela ne prouve pas que l'hypothèse de Lorentz soit la seule qui conduise à ce résultat.

Pour établir ce point, nous allons nous restreindre, ainsi que l'a fait Lorentz, à certains cas particuliers, ce qui nous suffira évidemment pour démontrer une proposition négative.

Comment allons-nous d'abord étendre les hypothèses sur lesquelles reposaient le calcul précédent ?

1°) Au lieu de supposer $l = 1$ dans la transformation de Lorentz, nous supposons l quelconque.

2°) Au lieu de supposer que F est proportionnel au volume, et par conséquent que L est proportionnel à h , nous supposons que F est une fonction quelconque de θ et de r , de telle façon que [après avoir remplacé θ et r par leurs valeurs en fonction de v , tirées de (230)] L soit une fonction quelconque de v .

Supposons maintenant que l'on ait $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$, l'équation (242) prendra la forme exprimée en (234) et (237) :

$$\begin{aligned} -d(\partial L / \partial v_x) / dt &= (dP / dv) (dv_x / dt) = \int f_x d\tau = F_x & | \\ -d(\partial L / \partial v_y) / dt &= (P / v) (dv_y / dt) = \int f_y d\tau = F_y & | \end{aligned} \quad (255)$$

Nous pouvons d'ailleurs poser, pour ce cas particulier :

$$dP / dv = q(v) = q(v_x) \quad ; \quad P / v = s(v) = s(v_x) \quad (256)$$

Si les équations du mouvement ne sont altérées par la transformation de Lorentz, on devra avoir :

$$q(v_x) \cdot dv_x / dt = F_x \quad ; \quad s(v_y) \cdot dv_y / dt = F_y \quad ; \quad q(v_x') \cdot dv_x' / dt' = F_x' \quad ; \quad s(v_y') \cdot dv_y' / dt' = F_y' \quad (257)$$

D'autre part, compte-tenu de l quelconque, mais aussi de $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ à l'instant considéré, les équations (2) et (4) (ou bien les équations (17) et (38)) donnent :

$$F_x' = F_x / l^2 \quad ; \quad F' = F / l^2 \gamma \lambda \quad ; \quad \{ \lambda = 1 - \beta v_x \} \quad (258)$$

Enfin, avec (247) :

$$dv_x' / dt' = (dv_x / dt) / \gamma^3 \lambda^3 \quad ; \quad dv_y' / dt' = (dv_y / dt) / \gamma^2 \lambda^2 \quad (259)$$

La liaison $v_x \rightarrow v_x'$ (addition des vitesses dans la transformation de Lorentz) étant :

$$v_x' = (v_x - \beta) / \lambda \quad (260)$$

les équations (257)-(260) conduisent à :

$$q(v_x') = q[(v_x - \beta) / \lambda] = \gamma^3 \lambda^3 q(v_x) / l^2 \quad ; \quad s(v_x') = s[(v_x - \beta) / \lambda] = \gamma \lambda s(v_x) / l^2 \quad (261)$$

En posant $\Omega(v_x) = s(v_x) / q(v_x)$ on peut éliminer l et obtenir l'équation fonctionnelle :

$$\Omega(v_x') = \Omega[(v_x - \beta) / (1 - \beta v_x)] = (1 - \beta^2) \Omega(v_x) / (1 - \beta v_x)^2 \quad (262)$$

Cette équation doit être satisfaite pour toutes les valeurs de β et de v_x , elle conduit nécessairement à :

$$\Omega(v) = \Omega(0) \cdot (1 - v^2) \quad (263)$$

comme on peut le voir aisément pour $v_x = 0$, et le vérifier ensuite dans le cas général.

Cependant :

$$\Omega(v) = s(v) / q(v) = P / v (dP/dv) \quad (264)$$

Donc :

$$dP/dv = P / [\Omega(0) \cdot (v - v^3)] \quad (265)$$

ce qui s'intègre en :

$$P = A [v / \sqrt{(1 - v^2)}]^m \quad (266)$$

avec $A = \text{constante}$ et $m = 1 / \Omega(0)$.

On trouve alors :

$$s(v) = P / v = A v^{(m-1)} (1 - v^2)^{-m/2} \quad (267)$$

et, avec (261) :

$$(v - \beta)^{(m-1)} (1 - \beta^2)^{(1-m)/2} = v^{(m-1)} / l^2 \quad (268)$$

Comme l , lié au changement du système d'axes, ne dépend que de β (s'il y a plusieurs électrons, l doit être le même pour tous même si leur vitesses v sont différentes) l'identité (268) ne peut avoir lieu que si l'on a :

$$m = 1 \quad ; \quad l = 1 \quad (269)$$

Ainsi, **l'hypothèse de Lorentz est la seule qui soit compatible avec l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu** ; si l'on admet cette impossibilité, il faut admettre que les électrons (*les particules chargées*) en mouvement se contractent de façon à devenir des ellipsoïdes de révolution dont deux axes demeurent constants ; il faut donc admettre, comme nous l'avons montré dans la section précédente, l'existence d'un potentiel supplémentaire proportionnel au volume de l'électron.

L'analyse de Lorentz se trouve donc pleinement confirmée, mais nous pouvons mieux nous rendre compte de la vraie raison du fait qui nous occupe ; cette raison doit être cherchée dans les considérations de la section 4. **Les transformations qui n'altèrent pas les équations du mouvement doivent former un groupe, et cela ne peut avoir lieu que si $l = 1$.** Comme nous ne devons pas pouvoir reconnaître si un électron est en repos ou en mouvement absolu, il faut que, quand il est en mouvement, il subisse une déformation qui doit être précisément celle que lui impose la transformation correspondante du groupe ».

* Dans cette section les principaux résultats obtenus par Poincaré sont donc les suivants :

A) La loi fondamentale de la dynamique relativiste généralise celle de la mécanique classique :

$$\begin{array}{l} \text{force appliquée} = \mathbf{F} = d\mathbf{P} / dt \quad | \\ \text{avec : } | \quad \mathbf{P} = \text{vecteur quantité de mouvement} = m_0 \mathbf{v} / \sqrt{(1 - v^2)} \quad | \\ | \quad m_0 = \text{constante} = \text{''masse au repos'' du corps étudié.} \quad | \end{array} \quad (270)$$

B) L'expression du Lagrangien L pour un point matériel :

$$L = m_0 \sqrt{(1 - v^2)} \quad (271)$$

On notera que la loi fondamentale (270) a déjà été obtenue en section 1 dans le cas particulier des forces électromagnétiques. Mais la présente analyse n'est basée que sur les propriétés d'invariance par rapport aux transformations du groupe de Lorentz et est indépendante de la nature des forces agissant sur le point matériel.

Les équations de la mécanique relativiste ainsi établies sont donc de nature générale.

Bien entendu l'analyse faite dans cette section ne concerne que les mouvements quasi stationnaires, c'est à dire ceux à faible accélération, elle sera étendue sans modification aux mouvements généraux dans la section suivante.

En section 9 Poincaré montrera que les quadrivecteurs $(\gamma, \gamma\mathbf{v})$ et $(\gamma\mathbf{T}, \gamma\mathbf{F})$, avec $\mathbf{T} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}$ sont transformés par les transformations de Lorentz exactement comme le quadrivecteur spatio-temporel (t, \mathbf{r}) .

8. Mouvement quelconque

« Les résultats précédents ne s'appliquent qu'au mouvement quasi-stationnaire, mais il est aisé de les étendre au cas général ; il suffit d'appliquer les principes de la section 3, c'est à dire de partir du principe de moindre action.

A l'expression de l'action :

$$J = \int dt d\tau [(\epsilon\mathbf{E}^2/2) - (\mathbf{B}^2/2\mu)] \quad (272)$$

il convient d'ajouter un terme, représentant le potentiel supplémentaire F de la section 6 ; ce terme prendra évidemment la forme :

$$J_1 = \int \Sigma (F) dt \quad (273)$$

où $\Sigma (F)$ représente la somme des potentiels supplémentaires dus aux différents électrons, chacun d'eux étant proportionnel au volume de l'électron correspondant.

L'action totale est alors $J + J_1$. Nous avons vu à la section 3 que J n'est pas altéré par une transformation de Lorentz ; il faut montrer maintenant qu'il en est de même de J_1 .

On a pour l'un des électrons :

$$F = \omega \tau = \int \omega dt \quad (274)$$

ω étant un coefficient spécial à l'électron et τ son volume (* *rappelons qu'en 1905 le mot "électron" désigne n'importe quelle particule chargée et que donc le coefficient ω peut être très variable d'une particule à l'autre*), donc dans l'expression de l'intégrale, où $d\tau$ est l'élément de volume, le facteur ω est une fonction qui est nulle à l'extérieur de l'électron et égale à ce coefficient spécial à l'intérieur.

On a alors, en tenant compte de tous les électrons :

$$J_1 = \int \omega dt \quad (275)$$

et, après la transformation de Lorentz, :

$$J_1' = \int \omega' dt' \quad (276)$$

Or on a $\omega = \omega'$, précisément pour que F soit proportionnel au volume de l'électron et parce que si un point de l'espace-temps appartient à un électron avant la transformation il appartient *au même électron* après la transformation.

D'autre part, grâce à (142) et (100) :

$$l = 1 \quad ; \quad dt' dt' = l^4 dt dt = dt dt \quad (277)$$

On a donc :

$$J_1' = J_1$$

(278)

ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème est donc général, il nous donne en même temps une solution de la question que nous nous posions à la fin de la section 1 : trouver des forces complémentaires non altérées par la transformation de Lorentz. Le potentiel supplémentaire F satisfait à cette condition.

Nous pouvons généraliser le résultat énoncé à la fin de la section 1 et écrire :

Si l'inertie des électrons est exclusivement d'origine électromagnétique, s'ils ne sont soumis qu'à des forces d'origine électromagnétique ou aux forces qui engendrent le potentiel supplémentaire F , aucune expérience ne pourra mettre en évidence le mouvement absolu.

Quelles sont alors ces forces qui engendrent le potentiel F ? Elles peuvent évidemment être assimilées à une pression qui régnerait à l'intérieur de l'électron ; tout se passe comme si chaque électron était une capacité creuse soumise à une pression interne constante (indépendante du volume) ; le travail d'une pareille pression serait évidemment proportionnel aux variations du volume.

Je dois observer toutefois que cette pression est négative.

Reprenons l'équation (226) de la section 6 qui, dans l'hypothèse de Lorentz, s'écrit :

$$F = K r^3 \theta^2$$

(279)

Avec $\zeta = 1$ dans le cas de Lorentz les équations (228) donnent :

$$K = a / 3b^4 \quad (280)$$

Notre pression est proportionnelle à K avec un coefficient constant, qui d'ailleurs est négatif ».

* *Le modèle de particule chargée ici considéré est le prototype de l'un des plus courants modèles modernes, celui des quarks dont l'élément essentiel est une densité de volume correspondant à une pression intérieure négative.*

« Evaluons maintenant la masse de l'électron, je veux parler de la « masse expérimentale », c'est à dire de la masse pour des vitesses faibles (* appelée aujourd'hui « masse au repos » m_0).

Avec (238) nous avons :

$$L = (a / b) \sqrt{(1 - v^2)} \quad (281)$$

Pour v très petit, je puis écrire :

$$L = (a / b) [1 - (v^2 / 2)] \quad (282)$$

de sorte que la masse, tant longitudinale que transversale, sera (a / b) .

Or a est une constante numérique, ce qui montre que *la pression qui engendre notre potentiel supplémentaire est proportionnelle à la quatrième puissance de la masse expérimentale de l'électron.*

Comme l'attraction newtonienne est proportionnelle à cette masse expérimentale, on est tenté de conclure qu'il y a quelque relation entre la cause qui engendre la gravitation et celle qui engendre ce potentiel supplémentaire ».

9. Hypothèses sur la Gravitation

* « La masse a deux aspects : c'est à la fois un coefficient d'inertie et une masse attirante entrant comme facteur dans l'attraction newtonienne. Si le

*coefficient d'inertie n'est pas constant, la masse attirante pourra-t-elle l'être ? Voilà la question.*²³

23 Poincaré H. *L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique*. Bulletin des sciences mathématiques. Tome 28. 2^e série (réorganisé 39-1), page 317, Novembre 1904.

« Ainsi la théorie de Lorentz expliquerait complètement l'impossibilité de mettre en évidence le mouvement absolu, si toutes les forces étaient d'origine électromagnétique.

Mais il y a des forces auxquelles on ne peut pas attribuer une origine électromagnétique, par exemple la gravitation. Il peut arriver, en effet, que deux systèmes de corps produisent des champs électriques équivalents, c'est à dire exerçant la même action sur des corps électrisés et sur des courants, et que cependant ces deux systèmes n'exercent pas la même action gravifique sur les masses newtoniennes. Le champ gravifique est donc distinct du champ électromagnétique. Lorentz a donc été obligé de compléter son hypothèse en supposant que *les forces de toute origine, et en particulier la gravitation, sont affectées par une translation* (ou, si l'on aime mieux, par la transformation de Lorentz) *de la même manière que les forces électromagnétiques*.

Il convient maintenant d'entrer dans les détails et d'examiner de plus près cette hypothèse. Si nous voulons que la force newtonienne soit affectée de cette façon par la transformation de Lorentz, nous ne pouvons plus admettre que cette force dépend uniquement de la position relative du corps attirant et du corps attiré à l'instant considéré. Elle devra dépendre en outre de la vitesse des deux corps. Et ce n'est pas tout : il sera naturel de supposer que la force qui agit à l'instant t sur le corps attiré dépend de la position et de la vitesse de ce corps à ce même instant t ; mais elle dépendra, en outre, de la position et de la vitesse du corps *attirant* non pas à l'instant t , mais à *un instant antérieur*, comme si la gravitation avait mis un certain temps à se propager.

Envisageons donc la position du corps attiré à l'instant t_0 et soient à cet instant \mathbf{r}_0 sa position et \mathbf{v} sa vitesse ; considérons d'autre part le corps attirant à l'instant correspondant $t_0 + t$ et soient à cet instant $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$ sa position et \mathbf{v}_1 sa vitesse.

Nous devons d'abord avoir une relation :

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = 0 \quad (283)$$

pour définir le temps t . Cette relation définira la loi de la propagation de l'action gravifique (je n'impose nullement la condition que la propagation se fasse avec la même vitesse dans tous les sens).

Soit maintenant \mathbf{F} l'action exercée à l'instant t_0 sur le corps attiré ; il s'agit d'exprimer \mathbf{F} en fonction de $t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1$.

Quelles sont les conditions à remplir ?

1°) La condition (283) ne devra pas être affectée par les transformations du groupe de Lorentz.

2°) Les composantes de \mathbf{F} devront être affectées par les transformations de Lorentz de la même manière que les forces électromagnétiques, c'est à dire conformément aux équations (250).

3°) Quand deux corps sont au repos, on devra retomber sur la loi ordinaire de l'attraction.

Il importe de remarquer que, dans ce dernier cas, la relation (283) disparaît, car le temps ne joue plus aucun rôle si les deux corps sont au repos.

Le problème ainsi posé est évidemment indéterminé. Nous chercherons donc à satisfaire autant que possible à d'autres conditions complémentaires.

4°) Les observations astronomiques ne semblant pas montrer de dérogation sensible à la loi de Newton, nous choisirons la solution qui s'écarte le moins de cette loi, pour de faibles vitesses des deux corps.

5°) Nous nous efforcerons de nous arranger de façon que t soit toujours négatif ; si en effet on conçoit que l'effet de la gravitation demande un certain temps pour se propager, il serait plus difficile de comprendre comment cet effet pourrait dépendre de la position *non encore atteinte* par le corps attirant.

Il y a un cas où l'indétermination du problème disparaît ; c'est celui où les deux corps sont en repos *relatif* l'un par rapport à l'autre, c'est à dire où $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$; c'est donc ce cas que nous allons examiner d'abord, en supposant que ces vitesses sont constantes, de telle sorte que les deux corps sont entraînés dans un mouvement de translation commun rectiligne et uniforme.

Nous pouvons supposer que l'axe des x a été pris parallèle à cette translation, de telle façon que $v_y = v_z = 0$, et nous prendrons $\beta = v_x$.

Si, dans ces conditions, nous appliquons la transformation de Lorentz, après la transformation les deux corps seront au repos et l'on aura $\mathbf{v}' = 0$.

Alors la force \mathbf{F}' devra être conforme à la loi de Newton et l'on aura à un facteur constant près :

$$\mathbf{F}' = -\mathbf{r}' / r'^3 \quad (284)$$

Mais l'on a d'après (8) et (250), et compte-tenu de $l=1$.

$$\begin{array}{l} x' = \gamma (x - \beta t) \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = \gamma (t - \beta x) \\ \lambda = 1 - \beta v_x = 1 - \beta^2 = 1 / \gamma^2 \\ F_x' = F_x \quad ; \quad F_y' = \gamma F_y \quad ; \quad F_z' = \gamma F_z \end{array} \quad (285)$$

On a d'ailleurs :

$$x - \beta t = x - v_x t \quad ; \quad r'^2 = \gamma^2 (x - v_x t)^2 + y^2 + z^2 \quad (286)$$

et :

$$F_x = -\gamma (x - v_x t) / r'^3 \quad ; \quad F_y = -y / \gamma r'^3 \quad ; \quad F_z = -z / \gamma r'^3 \quad (287)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = \partial V / \partial \mathbf{r} \quad ; \quad \text{avec :} \quad V = 1 / \gamma r' \quad (288)$$

Il semble d'abord que l'indétermination subsiste, puisque nous n'avons fait aucune hypothèse sur la valeur de t , c'est à dire sur la rapidité de la transmission ; et que d'ailleurs x est fonction de t ; mais il est aisé de voir que $x - v_x t$, y , z qui figurent seuls dans nos formules, ne dépendent pas de t .

On voit que si les deux corps sont simplement animés d'une translation commune, la force qui agit sur le corps attiré est normale à un ellipsoïde ayant pour centre le corps attirant.

Pour aller plus loin il faut chercher *les invariants du groupe de Lorentz* ».

* *L'exposé qui suit présente une formulation générale des principes mathématiques de la théorie de la relativité, y compris le calcul tensoriel et l'examen des invariants du groupe de Lorentz, invariants associés aux quantités physiques et à leurs relations.*

Ici, pour la première fois, Poincaré considéra les transformations du groupe de Lorentz comme des rotations d'un hyperespace à quatre dimensions, un hyperespace dont les coordonnées sont les coordonnées spatiales x, y, z et le « temps imaginaire »

$t\sqrt{-1}$, ce qui conserve la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.

A la suite de Poincaré, Minkowsky développa tous ces arguments qui concernent l'unité de l'espace et du temps. L' "espace-temps" de la relativité restreinte a une géométrie "pseudo-euclidienne". Dans son célèbre exposé de Cologne, devant un aréopage de scientifiques et de docteurs venus de toute l'Allemagne, exposé

décisif pour la vulgarisation de la théorie de la relativité, Hermann Minkowsky développa ses idées comme suit :

« Mesdames et Messieurs, les notions d'espace et de temps, que j'ai l'intention de développer ici, sont basées sur des expériences physiques . C'est pourquoi elles sont solides. Le changement est radical. Dorénavant l'espace et le temps traditionnels vont devenir des fictions tandis que seulement une certaine forme liée aux deux conceptions va conserver un sens physique réel et indépendant ».²⁴

« Nous savons que les substitutions de ce groupe sont les substitutions linéaires qui n'altèrent pas la forme quadratique :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \quad (289)$$

Posons d'autre part :

$$\mathbf{v} = \delta \mathbf{r} / \delta t \quad ; \quad \delta \mathbf{r} = (\delta x, \delta y, \delta z) \quad ; \quad \mathbf{v}_1 = \delta_1 \mathbf{r} / \delta t \quad ; \quad \delta_1 \mathbf{r} = (\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z) \quad (290)$$

nous voyons que la transformation de Lorentz aura pour effet de faire subir à $\delta \mathbf{r}$, δt , $\delta_1 \mathbf{r}$, $\delta_1 t$ les mêmes substitutions linéaires qu'à \mathbf{r} et t .

Regardons

$$x, y, z, t\sqrt{-1} \quad ; \quad \delta x, \delta y, \delta z, \delta t\sqrt{-1} \quad ; \quad \delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z, \delta_1 t\sqrt{-1} \quad (291)$$

comme les coordonnées de trois points P, P', P'' dans l'espace à quatre dimensions. Nous voyons que la transformation de Lorentz n'est qu'une rotation de cet espace autour de l'origine regardée comme fixe. Nous n'aurons pas d'autres invariants distincts que les six distances des trois P, P', P'' entre eux et à l'origine, ou, si l'on aime mieux, que les deux expressions :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 \quad ; \quad x \delta x + y \delta y + z \delta z - t \delta t \quad (292)$$

ou les quatre expressions de même forme qu'on en déduit en permutant d'une manière quelconque les trois points P, P', P'' .

Mais ce que nous cherchons ce sont des fonctions des dix variables $t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1$ qui sont des invariants ; nous devons donc, parmi les combinaisons de nos six invariants, rechercher celles qui ne dépendent que de ces dix variables, c'est à dire celles qui sont homogène de degré zéro tant par rapport à $\delta x, \delta y, \delta z, \delta t$ que par rapport à $\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z, \delta_1 t$. Il nous restera quatre invariants distincts qui sont :

$$\mathbf{r}^2 - t^2 \quad ; \quad (\mathbf{t} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) / \sqrt{(1 - \mathbf{v}^2)} \quad ; \quad (\mathbf{t} - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1) / \sqrt{(1 - \mathbf{v}_1^2)} \quad ; \quad (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1) / \sqrt{(1 - \mathbf{v}^2)(1 - \mathbf{v}_1^2)} \quad (293)$$

Occupons-nous maintenant des transformations subies par les composantes de la force ; reprenons les équations (36) de la première section qui se rapportent non à la force \mathbf{F} que nous examinons ici, mais à la force \mathbf{f} rapportée à l'unité de volume. Posons d'ailleurs :

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (294)$$

nous verrons que ces équations (36) peuvent s'écrire ($l = 1$):

$$f_x' = \gamma (f_x - \beta f_t) \quad ; \quad f_y' = f_y \quad ; \quad f_z' = f_z \quad ; \quad f_t' = \gamma (f_t - \beta f_x) \quad (295)$$

de sorte que \mathbf{f}, f_t subissent la même transformation que \mathbf{r}, t ; les invariants du groupe seront donc :

$$\mathbf{f}^2 - f_t^2 \quad ; \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{r} - f_t t \quad ; \quad \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} - f_t \delta t \quad ; \quad \mathbf{f} \cdot \delta_1 \mathbf{r} - f_t \delta_1 t \quad (296)$$

Mais ce n'est pas de \mathbf{f}, f_t dont nous avons besoin, c'est de \mathbf{F}, T avec :

$$T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (297)$$

Nous voyons que :

$$\rho \mathbf{F} = \mathbf{f} \quad ; \quad \rho T = f_t \quad (298)$$

Donc la transformation de Lorentz agira sur $\rho \mathbf{F}, \rho T$ de la même manière que sur \mathbf{f}, f_t .

De même $\delta t \mathbf{v}, \delta t$ égal à $\delta \mathbf{r}, \delta t$ avec le même rapport ρ' / ρ et $\delta t' / \delta t$ car :

$$\rho' / \rho = \gamma (1 - \beta v_x) = 1 / [\gamma (1 + \beta v_x')] = [(1 - v^2) / (1 - v'^2)]^{1/2} = \delta t' / \delta t \quad (299)$$

 Considérons alors $\mathbf{f}, f_t \sqrt{-1}$ comme les coordonnées d'un point Q ; alors les invariants
 24 Minkowski H. *Raum und Zeit* : Vortrage von der 80. Naturforschersammlung zu Köln .
 Physikalische Zeitschrift. B.10, N.3 - Seite 104-111, 1909.

seront les fonctions des distances mutuelles des cinq points :

$$O, P, P', P'', Q \quad (300)$$

et parmi ces fonctions nous devons conserver seulement celles qui sont homogènes de degré zéro, par rapport à $\mathbf{f}, f_t, \delta \mathbf{r}, \delta t$ et encore par rapport à $\delta_1 \mathbf{r}, \delta_1 t$. Grâce à l'homogénéité on peut ensuite remplacer ces variables par $\mathbf{F}, T; \mathbf{v}, l$ et \mathbf{v}_1, l respectivement.

Nous trouvons ainsi, outre les quatre invariants (293), quatre invariants distincts nouveaux, qui sont :

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^2 - T^2) / (1 - v^2) & ; & (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} - T t) / \sqrt{(1 - v^2)} & | \\ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_1 - T) / \sqrt{(1 - v^2)(1 - v_1^2)} & ; & (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - T) / (1 - v^2) & | \end{aligned} \quad (301)$$

Le dernier invariant est toujours nul, d'après la définition de T ».

* *Ayant découvert le groupe de Lorentz et l'invariant fondamental $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$,*

Poincaré établit qu'une série de quantités physique sont des "quadrivecteurs" qui varient comme les coordonnées d'espace et de temps lors des transformations de Lorentz.

Nous pouvons présenter la liste suivante :

Les coordonnées d'espace et de temps : (\mathbf{r}, t)

La force par unité de volume et le travail par unité de temps : $(\mathbf{f}, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v})$

Le courant et la charge par unité de volume : $(\rho \mathbf{v}, \rho)$

Le quadrivecteur $[(\mathbf{F}, \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) / \sqrt{(1 - v^2)}]$, avec $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = T$.

Le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie: $[m_0(\mathbf{v}, 1) / \sqrt{(1 - v^2)}]$, que l'on écrit parfois $(m\mathbf{v}, m)$, la masse m étant la "masse transversale", croissante avec la vitesse et égale à $m_0 / \sqrt{(1 - v^2)}$; (rappelons que la vitesse de la lumière est prise pour unité).

Les potentiels vecteur et scalaire : (\mathbf{A}, ϕ) .

« Cela posé quelles sont les conditions à remplir ?

1°) Le premier membre de la relation (283) qui définit la vitesse de propagation, doit être une fonction des quatre invariants (293).

On peut faire évidemment une foule d'hypothèses, nous n'en examinerons que deux :

A) On peut avoir :

$$r^2 - t^2 = 0 \quad ; \quad \text{d'où } t = -r \quad \text{puisque } t < 0 \quad (302)$$

Cela veut dire que la vitesse de propagation de la gravitation est égale à celle de la lumière.

Il semble d'abord que cette hypothèse doive être rejetée sans examen. Laplace a montré en effet que la propagation est, ou bien instantanée, ou beaucoup plus rapide que celle de la lumière. Mais Laplace avait examiné l'hypothèse de la vitesse finie de propagation, *ceteris non mutatis* (sans autre changement) ; ici, au contraire, cette hypothèse est compliquée de beaucoup d'autres, et il peut se faire qu'il y ait entre elles une compensation plus ou moins parfaite, comme celles dont les applications de la transformation de Lorentz nous ont déjà donné tant d'exemples.

B) On peut avoir :

$$(t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1) / \sqrt{(1 - v^2)} = 0 \quad ; \quad \text{soit : } t = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1 \quad (303)$$

La vitesse de propagation est alors beaucoup plus rapide que celle de la lumière ; mais, dans certains cas, t pourrait être positif, ce qui, comme nous l'avons dit, ne paraît guère admissible. *Nous nous en tiendrons donc à l'hypothèse A.*

2°) Les quatre invariants de (301) doivent être des fonctions des invariants de (293) (* pour des particules attirante et attirée données).

3°) Quand deux corps sont au repos absolu, \mathbf{F} doit avoir la valeur déduite de la loi de Newton, et quand ils sont en repos relatif, la valeur déduite des équations (287).

Dans l'hypothèse du repos absolu, les deux invariants de (301) doivent se réduire à :

$$F^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \quad (304)$$

ou, par la loi de Newton, à :

$$1 / r^4 \quad \text{et} \quad -1 / r \quad (305)$$

d'autre part, dans l'hypothèse A, le deuxième et le troisième des invariants de (293) deviennent :

$$(-r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) / \sqrt{(1 - v^2)} \quad \text{et} \quad (-r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1) / \sqrt{(1 - v_1^2)} \quad (306)$$

c'est à dire, pour le repos absolu, à :

$$-r \quad \text{et} \quad -r \quad (307)$$

Nous pouvons donc admettre *par exemple* que les deux premiers invariants de (301) se réduisent à :

$$(1 - v_1^2)^2 / (r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1)^4 \quad \text{et} \quad -\sqrt{(1 - v_1^2)} / (r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1) \quad (306)$$

mais d'autre combinaisons sont possibles.

Il faut faire un choix entre ces différentes combinaisons, et, d'autre part, pour définir \mathbf{F} , il nous faut une troisième équation. Pour un pareil choix, nous devons nous efforcer de nous approcher autant que possible de la loi de Newton. Voyons donc ce qui se passe quand (faisant toujours $t = -r$) on néglige les carrés des vitesses \mathbf{v} et \mathbf{v}_1 . Les quatre invariants de (293) deviennent alors :

$$0 \quad ; \quad -r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \quad ; \quad -r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1 \quad ; \quad 1 \quad (307)$$

et les quatre invariants de (301) :

$$\mathbf{F}^2 \quad ; \quad \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} + r \mathbf{v}) \quad ; \quad \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \quad ; \quad 0 \quad (308)$$

Mais pour pouvoir comparer avec la loi de Newton, une autre transformation est nécessaire ; ici $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}$ représentent la position du corps attirant à l'instant $t_0 + t$ avec $r = |\mathbf{r}|$; dans la loi de Newton, il faut envisager la position $\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1$ du corps attirant à l'instant t_0 , avec $r_1 = |\mathbf{r}_1|$.

Nous pouvons négliger le carré du temps nécessaire à la propagation et par conséquent faire comme si le mouvement était uniforme ; nous avons alors :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t \quad (309)$$

et, en négligeant le carré de \mathbf{v}_1 :

$$r(r - r_1) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1 t \quad (310)$$

or, puisque $t = -r$, (* et donc $r_1 = r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_1$) les quatre invariants (293) deviennent :

$$0 \quad ; \quad -r_1 + \mathbf{r}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \quad ; \quad -r_1 \quad ; \quad 1 \quad (311)$$

et les quatre invariants (301) :

$$\mathbf{F}^2 \quad ; \quad \mathbf{F}[\mathbf{r}_1 + r_1(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)] \quad ; \quad \mathbf{F}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \quad ; \quad 0 \quad (312)$$

Dans la seconde de ces expressions j'ai écrit r_1 au lieu de r , parce qu'il y est multiplié par $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_1)$ et que je néglige le carré des vitesses.

D'autre part la loi de Newton nous donnerait, pour ces quatre invariants (312) :

$$1 / r_1^4 \quad ; \quad \{ [\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) / r_1^2] - (1 / r_1) \} \quad ; \quad \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_1) / r_1^3 \quad ; \quad 0 \quad (313)$$

Si donc nous appelons A et B les deuxième et troisième invariants de (311), et M, P les trois premiers invariants de (312), nous satisferont à la loi de Newton, aux termes près de l'ordre du carré des vitesses, en faisant :

$$M = 1 / B^4 \quad ; \quad N = A / B^2 \quad ; \quad P = (A - B) / B^2 \quad (314)$$

Cette solution n'est pas unique. Soit en effet C le quatrième invariant de (311), C - 1 est de l'ordre du carré des vitesses et il en est de même de (A - B)².

Nous pourrions donc ajouter aux deuxième membres de chacune des équations (314) un terme formé de (C - 1) ou bien de (A - B)² multiplié par une fonction arbitraire de A, B, C.

Au premier abord, la solution (314) paraît la plus simple ; elle ne peut néanmoins être adoptée ; en effet, comme M, N, P sont des fonctions de **F** et de T = **F.v** on peut tirer de ces trois équations (314) la valeur de **F** mais dans certains cas cette valeur deviendrait imaginaire.

Pour éviter cet inconvénient, nous opérerons d'une autre manière. Posons :

$$\gamma_0 = 1 / \sqrt{(1 - v^2)} \quad ; \quad \gamma_1 = 1 / \sqrt{(1 - v_1^2)} \quad (315)$$

ce qui est justifié par l'analogie avec la notation :

$$\gamma = 1 / \sqrt{(1 - \beta^2)} \quad (316)$$

qui figure dans la substitution de Lorentz.

Dans ce cas, et à cause de la condition $r = -t$, les invariants (293) deviennent :

$$0 \quad ; \quad A = -\gamma_0 (r + \mathbf{r.v}) \quad ; \quad B = -\gamma_1 (r + \mathbf{r.v}_1) \quad ; \quad C = \gamma_0 \gamma_1 (1 - \mathbf{v.v}_1) \quad (317)$$

D'autre part, nous voyons que les systèmes suivants de quantités :

$$(\mathbf{r}, t) \quad ; \quad (\gamma_0 \mathbf{F}, \gamma_0 T) \quad ; \quad (\gamma_0 \mathbf{v}, \gamma_0) \quad ; \quad (\gamma_1 \mathbf{v}, \gamma_1) \quad (318)$$

subissent les *mêmes* substitutions linéaires quand on leur applique les transformations du groupe de Lorentz (* *comme nous l'avons noté après l'équation (301)*). Nous sommes conduit à poser :

$$\mathbf{F} = (a \mathbf{r} / \gamma_0) + b \mathbf{v} + (c \gamma_1 \mathbf{v}_1 / \gamma_0) \quad ; \quad \text{et, avec } t = -r : \quad T = (-a r / \gamma_0) + b + (c \gamma_1 / \gamma_0) \quad (319)$$

Il est clair que si a, b, c sont des invariants, **F**, T satisferont à la condition fondamentale, c'est-à-dire subiront, par l'effet de transformations de Lorentz, une substitution linéaire convenable.

Mais pour que les équations (319) soient compatibles, il faut que l'on ait $T - \mathbf{F.v} = 0$, ce qui, en les remplaçant par leurs valeurs en (319) et en multipliant par γ_0^2 devient :

$$A a + b + C c = 0 \quad (320)$$

Ce que nous voulons, c'est que si l'on néglige, devant le carré de la vitesse de la lumière, les carrés des vitesses **v** et **v**₁, ainsi que le produit des accélérations par les distances, comme nous l'avons fait plus haut, les valeurs de **F** restent conformes à la loi de Newton.

Nous pourrions prendre :

$$b = 0 \quad ; \quad c = -A a / C \quad (321)$$

Avec l'ordre d'approximation adopté, on a :

$$\gamma_0 = \gamma_1 = 1 \quad ; \quad C = 1 \quad ; \quad A = \mathbf{r}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) - r_1 \quad ; \quad B = -r_1 \quad ; \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_1 t = \mathbf{r}_1 - \mathbf{v}_1 r \quad (322)$$

La première équation (319) deviendra alors :

$$\mathbf{F} = a (\mathbf{r} - A \mathbf{v}_1) \quad (323)$$

Mais si l'on néglige le carré des vitesses, on peut remplacer $A \mathbf{v}_1$ par $-r_1 \mathbf{v}_1$ ou encore par $-r \mathbf{v}_1$, ce qui donne :

$$\mathbf{F} = a (\mathbf{r} + r \mathbf{v}_1) = a \mathbf{r}_1 \quad (324)$$

La loi de Newton donnerait :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{r}_1 / r_1^3 \quad (325)$$

Nous devons donc choisir, pour l'invariant a, celui qui se réduit à $-1 / r_1^3$ à l'ordre d'approximation adopté, c'est-à-dire $1 / B^3$. Les équations (319) deviendront :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{C} \mathbf{r} - \gamma_1 \mathbf{A} \mathbf{v}_1) / \gamma_0 B^3 C \quad ; \quad T = -(\mathbf{C} \mathbf{r} + \gamma_1 \mathbf{A}) / \gamma_0 B^3 C \quad (326)$$

Nous voyons d'abord que l'attraction corrigée se compose de deux composantes; l'une parallèle au vecteur qui joint les positions des deux corps, l'autre parallèle à la vitesse du corps attirant.

Rappelons que quand nous parlons de la position ou de la vitesse du corps attirant, il s'agit de sa position ou de sa vitesse au moment où l'onde gravifique le quitte ; pour le corps attiré, au contraire, il s'agit de sa position ou de sa vitesse du moment où l'onde gravifique l'atteint, cette onde étant supposée se propager avec la vitesse de la lumière.

Je crois qu'il serait prématuré de vouloir pousser plus loin la discussion de ces formules ; je me bornerai donc à quelques remarques.

1°) Les solutions de (326) ne sont pas uniques ; on peut, en effet, remplacer $1/B^3$, qui entre en facteur partout, par :

$$(1/B^3) + (C - 1) f_1(A, B, C) + (A - B)^2 f_2(A, B, C) \quad (327)$$

f_1 et f_2 étant des fonctions arbitraires de A, B, C , ou encore ne plus prendre b nul, mais ajouter à a, b, c des termes complémentaires quelconques, pourvu qu'ils satisfassent à la condition (320) et qu'ils soient du deuxième ordre par rapport aux vitesses \mathbf{v} et \mathbf{v}_1 , en ce qui concerne a et du premier ordre en ce qui concerne b et c .

2°) La première équation de (326) peut s'écrire :

$$\mathbf{F} = (\gamma_1 / B^3 C) [\mathbf{r}(1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_1 (\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})] \quad (328)$$

et la quantité entre crochets peut elle-même s'écrire :

$$\mathbf{r} + \mathbf{r} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v} \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}) \quad (329)$$

de sorte que la force totale peut être partagée en trois composantes correspondant aux trois termes de l'expression (329) ; la première composante a une vague analogie avec la force mécanique due au champ électrique, les deux autres avec la force mécanique due au champ magnétique ; pour compléter l'analogie, je puis, en vertu de la première remarque, remplacer dans la première équation (326) le terme $\gamma_1 \mathbf{A} \mathbf{v}_1$ par $C \gamma_1 \mathbf{A} \mathbf{v}_1$ de façon que \mathbf{F} ne dépende plus que linéairement de la vitesse \mathbf{v} du corps attiré (C disparaît du dénominateur de (328)).

Posons alors :

$$\mathbf{e} = \gamma_1 (\mathbf{r} + \mathbf{r} \mathbf{v}_1) \quad ; \quad \mathbf{b} = \gamma_1 [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}] \quad (330)$$

il viendra, C ayant disparu du dénominateur de (328), :

$$\mathbf{F} = (\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) / B^3 \quad (331)$$

et l'on aura d'ailleurs :

$$B^2 = \mathbf{e}^2 - \mathbf{b}^2 \quad (332)$$

Alors \mathbf{e} ou \mathbf{e} / B^3 est une espèce de champ électrique, tandis que \mathbf{b} ou plutôt \mathbf{b} / B^3 est une espèce de champ magnétique.

3°) Le postulat de relativité nous obligerait à adopter la solution (326) ou la solution (331) ou l'une quelconque des solutions qui s'en déduiraient à l'aide de la première remarque ; mais la première question qui se pose est celle de savoir si elles sont compatibles avec les observations astronomiques ; la divergence avec la loi de Newton est de l'ordre de v^2 c'est-à-dire 10 000 fois plus petite que si elle était de l'ordre de v , c'est à dire si la propagation de faisait avec la vitesse de la lumière *ceteris non mutatis* (sans autre changement) ; il est donc permis d'espérer qu'elle ne sera pas trop grande. Mais une discussion approfondie pourra seule nous l'apprendre.

Paris, Juillet 1905.

H. Poincaré.

* *Résumons brièvement les principaux résultats obtenus par Poincaré dans ces deux ouvrages.*

A) Il renouvelle sa présentation de 1904 du principe de relativité, principe qui concerne tous les phénomènes physiques (voir pages 3-4 et référence 4).

baptise groupe B) Il montre pour la première fois que les transformations, qu'il baptise "transformations de Lorentz", forment avec les rotations spatiales un mathématique, groupe qu'il baptise "groupe de Lorentz".

C) Il construit les opérateurs infinitésimaux de ce groupe et détermine son invariant : la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$; rappelons que la vitesse de la lumière est prise pour unité.

D) Il détermine les transformations correspondantes des champs électromagnétiques et établit une série de "quadrivecteurs" dont les modifications, lors des transformations de Lorentz, sont les mêmes que celles des coordonnées d'espace et de temps (quadrivecteur spatio-temporel (\mathbf{r}, t)).

Ces autres quadrivecteurs sont :

La force par unité de volume et le travail par unité de temps : $(\mathbf{f}, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v})$

Le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie $(m\mathbf{v}, m)$; avec

$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2}$, et $m_0 =$ "masse au repos".

Le courant et la charge par unité de volume : $(\rho \mathbf{v}, \rho)$.

Le quadrivecteur des potentiels vecteur et scalaire : (\mathbf{A}, φ)

Le quadrivecteur $[(\mathbf{F}, \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) / \sqrt{1 - v^2}]$ où \mathbf{F} est une force quelconque, par exemple la force électromagnétique appliquée à une charge unité.

E) Ce faisant il établit que les champs électromagnétiques et la force de Lorentz respectent eux aussi le principe de relativité lequel, en l'occurrence, procède des équations de Maxwell-Lorentz d'une manière mathématiquement rigoureuse.

F) Il établit la loi relativiste d'addition des vitesses.

G) Il démontre l'invariance de l'intégrale d'action pour un champ électromagnétique lors des transformations de Lorentz, et découvre les invariants fondamentaux du champ électromagnétique :

$$\varepsilon \mathbf{E}^2 - (\mathbf{B}^2 / \mu) \quad \text{et} \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

H) Il établit l'équation de la mécanique relativiste :

$$(\mathbf{F}, \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) = d(m, m\mathbf{v}) / dt$$

et écrit l'expression correspondante du Lagrangien d'un point matériel mobile.

I) Il imagine l'espace quadri-dimensionnel de coordonnées $x, y, z, t\sqrt{-1}$ et montre que les transformations de Lorentz sont des rotations de cet espace autour de l'origine. Cela lui permet de construire divers invariants.

J) Il souligne que toutes les forces de la nature, et pas seulement les forces électromagnétiques, sont transformées de la même manière lors des transformations de Lorentz.

K) Il introduit le concept d'"onde gravifique" ou onde gravitationnelle se déplaçant à la vitesse de la lumière et montre que la propagation de la gravité à cette vitesse n'est pas contradictoire avec les données de l'observation.

Cette courte liste montre que Henri Poincaré fut le premier à découvrir les constituants essentiels de la théorie de la relativité, et ce dans une forme précise et générale.

