

$E = m c^2$ **l'équation de Poincaré, Einstein et Planck**

Christian Bizouard,
Observatoire de Paris, département “ Systèmes de Références Temps-Espace ”.

Pour l'homme de la rue, et même la plupart des physiciens, la célèbre équation de la physique $E=mc^2$, traduisant la possibilité de convertir la matière (de masse m) en énergie (E) et inversement ou l'équivalence de masse et de l'énergie – c étant la vitesse de la lumière dans le vide –, est le fruit exclusif des cogitations géniales Einstein sur la théorie de la relativité. Pourtant une telle opinion s'apparente plus à une image d'Epinal qu'à la vérité. La genèse de $E=mc^2$, nous allons le voir, passe par des voies inattendues.

Les précurseurs.

Dès 1704, dans son fameux traité *Opticks*, Newton évoquait la possibilité que la matière se convertisse en lumière et réciproquement : “ *Un corps grave et la lumière ne sont-ils pas convertibles l'un dans l'autre ?* ”. A la fin du XIXème siècle les physiciens se trouvaient face au mystère de l'énergie solaire et des processus radioactifs, qui défiaient toutes les énergies connues. Le paradoxe pouvait être levé en supposant, comme le physicien anglais S. Tolver Preston (*Physique de l'éther*, 1875), que la matière puisse être convertie en énergie. En 1903 l'industriel italien Olinto de Pretto propose que cette transformation soit régit par la formule $E=mc^2$ ¹. Dans son livre *Evolution de la matière* paru en 1905, le physicien et sociologue français Gustave Lebon suppose que la désintégration totale de la matière en lumière fournit l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m c^2$ selon la formule classique de cette énergie ; il en conclut que la quantité d'énergie “ intra-atomique ” atteint $\frac{1}{2} m c^2$ et il est le premier à imaginer une bombe basée sur une telle désintégration.

Poincaré démontre l'équivalence masse-énergie électromagnétique.

La première ébauche théorique est celle du savant français Henri Poincaré. Son œuvre gigantesque couvre aussi bien les mathématiques, l'astronomie, la physique théorique que l'épistémologie. En 1900, Lorentz venait de formaliser sa nouvelle théorie électromagnétique. Résumée de façon schématique, elle consistait à introduire dans la théorie de Maxwell la fameuse force de Lorentz, qui décrit le comportement d'une particule chargée dans un milieu où règne un champ électromagnétique, lui-même régi par les non moins fameuses équations de Maxwell. Or il y avait un hic, et de taille : contrairement à toutes les forces considérées jusqu'alors, les forces de Lorentz ne satisfaisaient pas au sacro-saint principe de l'action et de la réaction. Dès 1898 dans un cours professé à la Sorbonne², reformulé en 1900 dans un mémoire oublié aujourd'hui et intitulé *La théorie de Lorentz et le principe de l'action et de la réaction*, Poincaré démontre qu'un système de charges électriques isolés subit une force électromagnétique interne (!), et qu'en

¹ De Pretto, O. (1904), “ Ipotesi dell'etere nella vita dell'universo ”, *Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Feb. 1904, tomo LXIII, parte II, pp 439-500

² d'après Jean Paul Auffray.

conséquence il voit son centre de gravité accéléré spontanément sans qu'aucune force externe ne soient appliquée. Hérésie totale...à moins d'attribuer au champ électromagnétique ambiant, provoqué par ces mêmes charges en mouvement relatif, une masse inertielle et une quantité de mouvement opposée à celle impartie au système mécanique. De la sorte le système mécanique comprenant les charges et ce mystérieux fluide électromagnétique voit sa quantité de mouvement totale conservée, et le principe de l'inertie est sauvé. En résumé, la compatibilité des forces de Lorentz avec le principe de l'inertie nécessite qu'un champ électromagnétique charrie, là où il règne, de la masse. Conclusion fort étrange, et Poincaré, savant très prudent et peu enclin aux pétitions de principe, préférerait parler de fluide " fictif ". Plus précisément, Poincaré établit que si l'élément de volume $d\tau$ renferme l'énergie électromagnétique dE , alors la masse de fluide fictif est $dm = dE/c^2$. C'est l'équivalence énergie matière.

Pour appréhender plus concrètement ce résultat théorique, considérons un corps, initialement au repos, émettant une radiation électromagnétique plane, d'énergie E , dans une direction donnée par le vecteur unitaire \vec{n} (l'énergie électromagnétique est localisée le long du faisceau). Si nous désignons par \vec{P} la quantité de mouvement du corps après émission, \vec{M} l'impulsion du train d'onde, la conservation de la quantité de mouvement du système {Corps + Radiation} s'écrit : $\vec{0} = \vec{P} + \vec{M}$. Pour une onde électromagnétique plane le champ magnétique \mathcal{B} est relié simplement au champ électrique \mathcal{E} par $\mathcal{E} = \mathcal{B} c$, et les formules de Poincaré permettent alors d'établir que la quantité de mouvement de la radiation s'exprime par : $\vec{M} = \mathcal{E} / c \vec{n}$. En attribuant à la radiation une masse m_{eq} se mouvant à la vitesse c , on a $M = E/c = m_{eq} c$, soit $m_{eq} = E/c^2$. Ce qui constitue ni plus ni moins que la formule d'équivalence masse – énergie électromagnétique. Après émission, il en résulte que le corps acquiert la quantité de mouvement opposée et recule à la vitesse $v = E/(c m)$, m étant sa masse.

Citons la conclusion qu'en tire Poincaré : “ *L'énergie électromagnétique se comportant donc au point de vue qui nous occupe comme un fluide doué d'inertie, on doit conclure que si un appareil quelconque après avoir produit de l'énergie électromagnétique, l'envoie par rayonnement dans une certaine direction, cet appareil devra reculer comme recule un canon qui a lancé un projectile... Si l'appareil a une masse de 1 kg et s'il a envoyé dans une direction unique avec la vitesse de la lumière 3 millions de J, la vitesse due au recul est de 1 cm/s* ”.

Dans son mémoire *Sur la dynamique de l'électron*,³ Poincaré démontre qu'aux faibles vitesses le lagrangien d'un électron prend la forme $L = m (c^2 - v^2/2)$. Comme le note J.P. Auffray⁴, si Poincaré s'était tant soit peu donné la peine d'analyser cette formule, il l'aurait retranscrite sous la forme : U (énergie potentielle) – K (énergie cinétique) = $m (c^2 - v^2/2)$ soit encore $U = m c^2$. Autrement dit l'énergie totale de l'électron s'écrit : $E = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2$. Poincaré donne donc implicitement la formule de l'énergie au repos d'un électron sous la forme $E = m c^2$.

Hasenöhr (1904-1905)

3 Poincaré H. (1905) : *Compte Rendus de l'Académie des Sciences*, 140, pages 1504 -1508.

4 Auffray J.P. (1999) : “ *Einstein et Poincaré* ”, Le Pommier-Fayard, 301 p.

Le physicien allemand Hasenöhr ⁵ en 1904, 1905, démontre que l'énergie électromagnétique E emplissant une cavité est douée d'une masse $4/3 E/c^2$. D'après le livre de E. Cunningham, *The principles of Relativity* (1914), le calcul de Hasenöhr est légèrement erroné, et aurait du donner E/c^2 s'il avait pris correctement en compte les propriétés de la cavité.

Einstein 1905-

Einstein publie coup sur coup durant l'année 1905 cinq articles dans la prestigieuse revue allemande *Annalen der Physik*. Dans le troisième il se propose de répondre à la question “*L'inertie d'un corps dépend-il de son contenu énergétique ?*”⁶. Après examen il conclut : “*Si*

un corps cède l'énergie E sous forme de radiation, sa masse diminue de E/c^2 puis extrapole : “La masse d'un corps est une mesure de son contenu en énergie ; si son énergie varie de E , sa masse varie dans dans le même sens de E/c^2 ”. Cependant on s'aperçoit aisément, à l'instar de H. Ives (1952) ⁷, que la démonstration d'Einstein est incorrecte : elle constitue une tautologie. Nous préférons exposer dans la suite la démonstration de Ives, corrigeant celle d'Einstein. Une année plus tard, Einstein réplique ⁸ les considérations faites par Poincaré en 1900 à propos des forces de Lorentz (et reconnaît au passage l'antériorité de Poincaré). Il aboutit à une conclusion similaire, formulée de façon beaucoup plus radicale : “*Si donc à chaque énergie E on attribue la masse inertielle E/c^2 , le principe de l'inertie est aussi valable – du moins en première approximation – pour des systèmes où ont lieu des processus électromagnétiques*”.

Démonstration thermodynamique de Planck, 1907 ⁹

A l'orée de l'année 1907 $E = m c^2$ était établie pour l'inertie de l'énergie électromagnétique, mais aucune démonstration satisfaisante n'existait en ce qui concerne le contenu énergétique de la matière. Le patron de la physique théorique allemande, Max Planck, ne pouvait pas délaissier le problème soulevé par son poulain Einstein. Il s'y atèle dès 1906 sous l'angle thermodynamique. Armé du principe de moindre action de Helmholtz et du principe de relativité, il parvient à relier l'enthalpie d'une cavité renfermant des radiations électromagnétiques à la masse de cette cavité selon la formule $E = m c^2$. En page 29 de son article Planck conclut: “*Par toute absorption ou émission de chaleur la masse inerte du corps varie, et la variation de la masse est toujours égale à la quantité de chaleur divisée par le carré de la vitesse de la lumière dans le vide.*” Et plus bas, en note, il met le doigt sur la tautologie d'Einstein : “*Einstein a déjà tiré essentiellement la même conclusion par l'application du Principe de Relativité à un processus spécial de radiation, cependant en première approximation seulement, sur l'hypothèse que l'énergie totale d'un corps en mouvement est composé additivement de son énergie cinétique et de son énergie rapportée à son système propre.*”

Poincaré (1900) + Einstein + Ives (1952) ¹⁰

5 Hasenöhr F. (1904) : *Wien Sitzungen* II A, 113, 1039 – Hasenöhr F. (1905) : *Ann. Der Physik*, 16, 589

6 Einstein A. (1905) : “ Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig? ” *Annalen der Physik.*, vol. 18: 639 18:639, 905

7 Ives H. (1952) : “ Derivation of the mass energy relation ”, *J. Opt. Soc. Americ.* 42, 8, 540-543

8. Einstein A. (1906) : “ Das Prinzip von der Erhaltung der Schwärpuntsbewegung und die Trägheit der Energie ”. *Annalen der Physik.* Vol 20, pages 627-633.

9 Planck M. (1908) : “ Zur Dynamik bewegter Systeme ”. *Annalen der Physik.* Vierte Folge, Band 26 , Seite 1-34

La conversion matière – énergie selon $E=mc^2$ peut être établie beaucoup plus simplement en postulant le principe de relativité et la conservation de la quantité de mouvement du système mécanique comprenant à la fois le corps et l'impulsion lumineuse qu'il émet ou reçoit. En 1946 Einstein propose une telle démonstration¹¹ approximative et rendue inutilement compliquée par la considération d'un phénomène d'aberration. Nous préférons exposer une démonstration analogue dans son principe, faite par le physicien américain H. Ives en 1952.

Soit un corps suspendu dans une boîte par un fil non-conducteur. Soudain il émet deux impulsions d'énergie $L/2$ dans deux directions opposées. Tout d'abord plaçons nous dans un système de référence dans lequel la boîte se trouve au repos. D'après Poincaré la quantité de mouvement du faisceau émis vers la droite est $L/2c$, celle du faisceau émis vers la gauche est $-L/2c$, et la conservation de la quantité de mouvement implique que le corps demeure au repos dans la boîte. Dans un second temps, prenons le point de vue d'un observateur se mouvant à la vitesse uniforme v , vers la gauche, par rapport à la boîte. Dans le repère de l'observateur, la conservation de la quantité de mouvement avant/après émission s'exprime par :

$$\underbrace{\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\text{quantité de mouvement du corps avant émission}} = \underbrace{\frac{m'v'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}}_{\text{quantité de mouvement du corps après émission}} + \underbrace{\frac{L}{2c} \frac{1-v/c \cos(\pi)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\text{quantité de mouvement du train droit}} + \underbrace{\frac{-L}{2c} \frac{1-v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\text{quantité de mouvement du train gauche}}$$

L'équation précédente s'appuie sur la transformation relativiste des énergies, donnée par Einstein en 1905 dans l'article fondateur de la relativité einsteinienne¹². D'après le principe de relativité le mouvement uniforme de la boîte ne peut pas affecter la position du corps dans celle-ci. Il y demeure au repos, donc $v' = v$, ce qui implique immédiatement que $(m-m') = L/c^2$. CQFD.

Conclusion

Indubitablement $E=mc^2$ était dans l'air du temps. C'est Poincaré qui en pose les fondements théoriques. Il met en évidence la quantité de mouvement d'une radiation électromagnétique ; tout se passe comme si chaque élément contenant l'énergie dE charriait localement la "masse fictive" dE/c^2 . En 1905 Einstein tente de démontrer qu'un corps radiant/absorbant l'énergie E perd/gagne la masse $m = E/c^2$, mais commet une tautologie. En 1907 Planck propose une démonstration thermodynamique/relativiste dans le cas d'une absorption ou émission de lumière. En fait il existe une dérivation élémentaire s'appuyant sur le moment de radiation de Poincaré et le principe de relativité, comme s'en apercevra Einstein en 1946, et de façon plus satisfaisante Ives en 1952. Tout comme $E=mc^2$ n'est pas la formule d'une seule personne, elle ne tire pas son origine de la seule théorie de la relativité : elle se trouve au confluent des principes de la mécanique, du principe de relativité et de la théorie électromagnétique.

¹⁰ Voir référence 7

¹¹ Einstein A. (1946) : "Une démonstration élémentaire de l'équivalence masse-énergie". *Technion Journal* n°5, p. 16-18.

¹² Einstein A. (1905) : "Zur Elektrodynamik bewegter Körper". *Annalen der Physik*, 17, pages 891- 921.